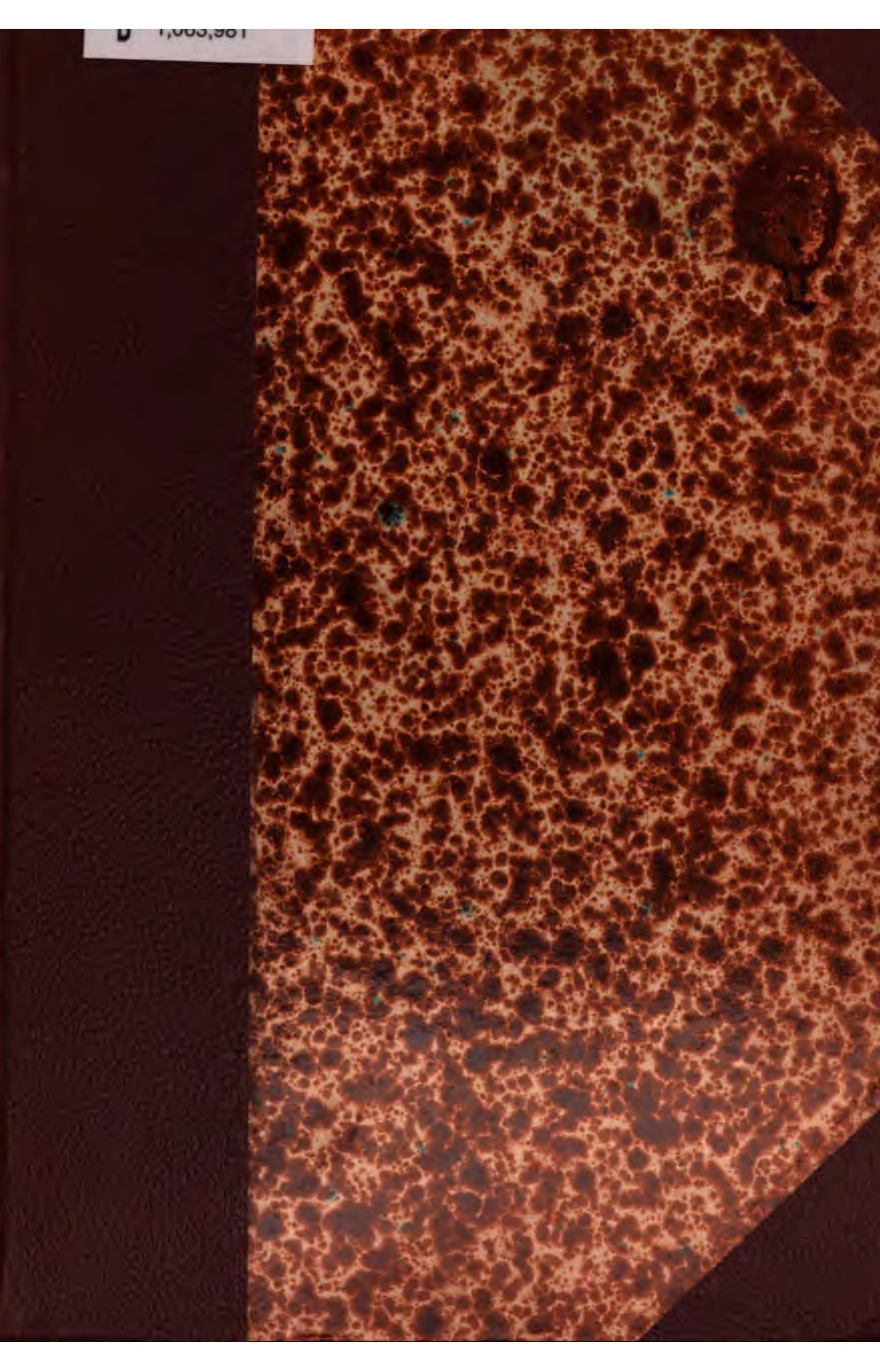





Ford - Messer
Bequest
E P FABER





SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES.

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.

CONST. DE FID. CATH., c. IV.

DIX-HUITIÈME ANNÉE, 1893-1894

BRUXELLES	PARIS
SOCIÉTÉ BELGE DE LIBRAIRIE	GAUTHIER-VILLARS & FILS
OSCAR SCHEPENS, Directeur	IMPRIMEURS-LIBRAIRES
16, RUE TREURENBERG, 16	55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55

BRUXELLES, F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE
DE BELGIQUE, 112, RUE DE LOUVAIN.

1894

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

COMMUNICATIONS DIVERSES.

CONFÉRENCES.

DISCUSSION.

VISITES.

AUTEURS.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

AUTEURS.

QUESTIONS AU CONCOURS.

1° *Des foyers à gaz au point de vue hygiénique.*

2° *Trouver les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables* $f(x, y, z)$ *dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre dans le développement de* $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ *peut s'annuler sans changer de signe.*

3° *Donner, au point de vue paléontologique et géologique, la description monographique d'une veine de houille à travers tout un bassin houiller, pour vérifier l'exactitude de la synonymie actuellement reçue.*

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article 1er. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de Société scientifique de Bruxelles, avec la devise: « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* » (1).

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche.

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (2).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

---

(1) Const. de Fid. cath., c. IV.

(2) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de *Revue des questions scientifiques*. Elle forme chaque année deux volumes in-8° de 700 pages. Prix de l'abonnement : 20 francs par an pour tous les pays de l'Union postale. Les membres de la Société scientifique ont droit à une réduction de 25 pour cent.

Art. 5. — Elle est dirigée par un *Conseil* de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles.

Art. 6. — Pour être admis dans l'association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tout les membres ont le même droit de vote dans les Assemblées générales.

Art. 8. — Chaque année il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels, et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante.

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise dans l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en cinq sections : I. *Sciences mathématiques*, II. *Sciences physiques*, III. *Sciences naturelles*, IV. *Sciences médicales*, V. *Sciences économiques*.

Tout membre de l'association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué.

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'association et présente dans la session de Pâques le

compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres votants, et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

RÈGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES.

1. — Le Conseil de la Société scientifique de Bruxelles a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — A cet objet seront consacrés :

1° Le revenu du bénéfice acquis à la Société jusqu'à la session de Pâques 1879;

2° La moitié du bénéfice acquis pendant l'exercice qui précède l'exercice courant.

3. — Chaque année, l'une des sections désignera une question à mettre au concours. L'ordre dans lequel les sections feront cette désignation sera déterminé par le sort. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil, qui donnera aux questions la publicité convenable.

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société; la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix seront décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a l'obligation de publier aucun travail couronné; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis au Conseil six semaines avant cette session. Le 1er octobre de l'année précédente est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat.

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la Société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une

manière générale; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches, quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes de subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses *Annales* s'il y a lieu.

NOTE. — Le tirage au sort, ordonné par l'article 5, a rangé les sections dans l'ordre suivant : 2e, 3e, 5e et 1re.

LETTRE

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES.

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis Scientificae Bruxellis constitutae.

LEO PP. XIII.

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem.

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi relligionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IV^{a} de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut

nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitutum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes coelestibus praesidiis confirmet ac muniat: quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae apud S. Petrum die 15. Ianuarii 1879. Pontificatus Nostri Anno Primo.

LEO PP. XIII.

A nos chers fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles.

LÉON XIII, PAPE.

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE.

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer *qu'il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison,* comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica,* le saint concile du Vatican affirmant la doctrine constante de l'Église et des saints Pères. C'est pourquoi Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans les Statuts un article défendant

à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement de tout l'effort de leur esprit l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours : en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, chers fils, et à votre Société la bénédiction apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'an 1 de notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

LISTES

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

ANNÉE 1895.

Liste des membres fondateurs.

S. É. le cardinal DECHAMPS (1), archevêque de . .	Malines.
François DE CANNART D'HAMALE (1).	Malines.
Charles DESSAIN	Malines.
Jules VAN HAVRE (1)	Anvers.
Le chanoine MAES (1).	Bruges.
Le chanoine DE LEYN	Bruges.
LEIBENS-ELIAERT	Alost.
Frank GILLIS (1)	Bruxelles.
Joseph SAEY	Bruxelles.
Le Cher DE SCHOUTHEETE DE TERVARENT	Saint-Nicolas.
Le Collège SAINT-MICHEL.	Bruxelles.
Le Collège NOTRE-DAME DE LA PAIX	Namur.
Le duc D'URSEL, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pce Gustave DE CROY (1)	Le Rœulx.
Le Cte DE T'SERCLAES (1)	Gand.
Auguste DUMONT DE CHASSART (1)	Mellet (Hainaut).
Charles HERMITE, membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'IMMACULÉE-CONCEPTION. . . .	Vaugirard-Paris.
L'École libre SAINTE-GENEVIÈVE.	Paris.
Le Collège SAINT-SERVAIS.	Liége.
Le Cte DE BERGEYCK	Beveren-Waes.
L'Institut SAINT-IGNACE	Anvers.
Philippe GILBERT (1), correspondant de l'Institut.	Louvain.
Le R. P. PROVINCIAL de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.

---

(1) Décédé.

Le Collège Saint-Joseph.	Alost.
Le chanoine de Wouters	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
S. É. le cardinal Haynald ([1]), archevêque de Kalocsa et Bàcs.	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli . . .	Rome.
S. G. Mgr Du Roussaux, évêque de	Tournay.
S. É. le cardinal Goossens, archevêque de . . .	Malines.
R. Bedel	Aix.
S. G. Mgr Belin ([1]), évêque de.	Namur.
Eugène Pecher.	Bruxelles.
S. Exc. Mgr Ferrata, archevêque de Thessalonique, nonce apostolique	Paris.
S. Exc. Mgr Nava di Bontifè, archevêque d'Héraclée, nonce apostolique	Bruxelles.

Liste des membres honoraires.

Antoine d'Abbadie, membre de l'Institut . . .	Paris.
Charles Hermite, membre de l'Institut	Paris.
Le général Newton	New-York.
Le docteur Foerster	Aix-la-Chapelle.
A. de Lapparent	Paris.
A. Béchamp	Lille.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
Wolf, membre de l'Institut	Paris.
Haton de la Goupillière, membre de l'Institut .	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières, membre de l'Institut.	Paris.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
L. de Bussy, membre de l'Institut	Paris.
Louis Pasteur, membre de l'Institut.	Paris.
Aug. Daubrée, membre de l'Institut.	Paris.
Amagat, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique.	Paris.

([1]) Décédé.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles.

—

D'ABBADIE (Antoine), membre de l'Institut, 120, rue du Bac. — Paris; ou Abbadia par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

ABBELOOS (Mgr), docteur en théologie, recteur magnifique de l'Université, 3, montagne du Collège. — Louvain.

D'ACY (E.), 40, boulevard Malesherbes. — Paris.

ADAN DE YARZA (Ramon), ingénieur des mines. — Lequeitio (Vizcaya — Espagne).

ALEXIS, M. G. (Frère), 27, rue Oudinot. — Paris.

ALLARD (François), industriel. — Chatelineau.

AMAGAT, correspondant de l'Institut, répétiteur à l'École polytechnique, 34, rue St-Lambert. — Paris.

ANDRÉ (J.-B.), inspecteur au ministère des travaux publics, 111, avenue Brugmann. — Uccle.

ARCELIN (Adrien), secrétaire perpétuel de l'Académie de Mâcon. — Châlon-sur-Saône (Saône-et-Loire — France).

ARDUIN (abbé Alexis), à Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

ARRILUCEA (Andrés P.), catedratico de Historia natural en el Instituto de 2ª enseñanza. — Ségovie (Espagne).

BALLION, 367, chaussée de Courtrai. — Gand.

BARDIN (abbé Louis), professeur de géologie à la Faculté, 21, rue Brault. — Angers (Maine-et-Loire — France).

BAREEL, S. J. (R. P. Victor), Collège du S.-Cœur, 58, rue de Montigny. — Charleroi.

DI BARTOLO (Canonico Salvatore), Ruggiero Settimo, 71. — Palermo (Sicile).

BAULE (Albert), lieutenant de vaisseau, 133, chemin de Magudas. — Caudéran, près Bordeaux (Gironde — France).

BAYET (Adrien), 33, nouveau marché aux Grains. — Bruxelles.

BEAUCOURT (abbé Léopold), curé des Écaussinnes d'Enghien.

BÉCHAMP, doyen de la Faculté catholique de médecine, 36, rue des Fossés. — Lille (Nord — France).

BEDEL (abbé R.), prêtre de St-Sulpice, directeur au Grand-Séminaire. — Aix (Bouches-du-Rhône — France).

Belpaire (Frédéric), ingénieur, 48, avenue du Margrave. — Anvers.
de Bergeyck (C[te]), château de Beveren-Waes (Flandre-Orientale).
Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.
Berlingin (Melchior), directeur des laminoirs de la Vieille-Montagne. — Penchot par Viviez (Aveyron — France).
Bertrand (Léon), 9, rue Crespel. — Bruxelles.
Béthune-Eliaert (B[on]), sénateur, rue du Pont. — Alost.
Béthune (Mgr Félix), 40, rue d'Argent. — Bruges.
Blondel (Alfred), ingénieur, 14, rue de la Magdeleine. — Tournay.
Blondiaux (Auguste), château du Champ-Bourdon. — Thy-le-Château (Namur).
Blot (abbé), 23, avenue de Messine. — Paris.
de la Boëssière-Thiennes (M[is]), 23, rue aux Laines. — Bruxelles; ou château de Lombise par Lens (Hainaut).
Bolsius, S. J. (R. P. Henri), Kerkstraat, A. 14. — Oudenbosch (Pays-Bas).
Bonamis (Florimond), ingénieur. — Jambes (Namur).
Borginon (Gustave), docteur en médecine, 58, rue Dupont. — Bruxelles.
Bossu (abbé L.), professeur à l'Université, 38, rue de Bériot. — Louvain.
Bouillot, directeur de l'École moyenne pratique et d'agriculture de l'État. — Vilvorde.
Boulay (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 14, rue Mercier. — Lille (Nord — France).
Bouqué, professeur à l'Université, 5, rue des Selliers. — Gand.
Bouquillon (abbé Th.), Catholic University of America. — Washington (Brookland, D. C., États-Unis d'Amérique).
Bourgeat (abbé), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).
Boussinesq, membre de l'Institut, 75, rue Claude-Bernard. — Paris.
du Boys (Paul), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Lacombe-de-Lancey, par Villard-Bonnot (Isère — France).
van den Branden de Reeth (Mgr), évêque d'Érythrée, au Collège Belge. — Rome.
Branly (Édouard), professeur à l'Institut catholique, 21, avenue de Tourville. — Paris.
Breithof (N.), professeur à l'Université, 95, rue de Bruxelles. — Louvain.

van der Bruggen (Bon Maurice), 20, rue du Gouvernement. — Gand.
Bruylants, professeur à l'Université catholique, de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.
Buisseret (Anatole), préfet des études, au Collège communal. — Nivelles.
Buisseret (Joseph), professeur, au Collège communal. — Nivelles.
de Bussy (L.), membre de l'Institut, inspecteur général des constructions navales, 7, rue de Jouy. — Paris.
Camboué, S. J (R. P. Paul), missionnaire apostolique, 33, rue de la Compagnie. — Saint-Denis (île de La Réunion).
Cappellen (Guillaume), conseiller provincial, 4, place Marguerite. — Louvain.
Carnoy (Joseph), professeur à l'Université, 9, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
Cartuyvels (Jules), directeur au ministère de l'agriculture, 40, rue Breydel. — Bruxelles.
Casarés (Firmino), farmacia, 93, calle de San Andrés. — La Coruña (Espagne).
Chautard, doyen de la Faculté catholique des sciences de Lille, villa St-Marc, par Croissanville (Calvados — France).
Clasen (abbé B.-I.), curé doyen d'Echternach (Grand-Duché de Luxembourg).
Cloquet (L.), professeur à l'Université, 30, plaine St-Pierre. — Gand.
Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.
Collège Notre-Dame de la Paix, 39, rue de Bruxelles. — Namur.
Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.
Collège Saint-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.
Collège Saint-Servais, 88, rue Saint-Gilles. — Liége.
Cools (Auguste), ingénieur. — Lierre.
Coppieters de Stockhove (abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.
Coupé (abbé J.), aumônier-adjoint de la Maison centrale pénitentiaire, 33, rue courte des Violettes. — Gand.
Cousin (L.), directeur de l'École polytechnique, conseiller technique du gouvernement chilien, 208, calle Cathedral (casilla 952). — Santiago (Chili).
Craninckx (Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.
de Croy (P^ce Juste), 63, rue de la Loi. — Bruxelles; ou Le Rœulx.
Cuylits (Jean), docteur en médecine, 44, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

DANIËLS (Dr Fr.), professeur au Séminaire. — Rolduc (Limbourg hollandais).
DAUBRÉE (Aug.), membre de l'Institut, professeur de géologie au Muséum, 254, boulevard Saint-Germain. — Paris.
DAUBRESSE (Paul), ingénieur, 42, rue des Orphelins. — Louvain.
DAVIGNON (Julien), 41, avenue de la Toison-d'Or. — Bruxelles.
DE BAETS (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.
DE BAETS (abbé Maurice), secrétaire de l'évêché, docteur en théologie et en philosophie, 9, quai du Pont-Neuf. — Gand.
DEBAISIEUX, professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.
DE BECKER (chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.
DE BIEN (Fernand), ingénieur, 50, avenue du Margrave. — Anvers.
DE BLOO (Julien), ingénieur, 89, boulevard Frère-Orban. — Gand.
DE BROUWER (chan.), curé-doyen. — Menin.
DE BRUYN (Jules), 175, chaussée de Wavre. — Bruxelles.
DE BUCK (Dr D.), 28, rue Basse. — Gand.
DEGIVE (A.), membre de l'Académie royale de médecine, directeur de l'École vétérinaire de l'État, boulevard d'Anderlecht. — Cureghem-lez-Bruxelles.
DE GREEFF, S. J. (R. P. Henri), Collège N.-D. de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.
DE JAER (Camille), avocat, 56, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.
DE JAER (Jules), ingénieur des mines, Vieux-Marché-aux-Bêtes. — Mons.
DELACRE (Maurice), membre correspondant de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 129, chaussée de Courtrai. — Gand.
DELAIRE (A), secrétaire général de la Société d'économie sociale, 238, boulevard St-Germain. — Paris.
DE LANTSHEERE (Dr J.), oculiste, 56, rue de l'Association. — Bruxelles.
DE LANTSHEERE (Léon), avocat, 216, rue du Trône. — Bruxelles.
DELAROYÈRE (W.), ingénieur, 56, Pêcherie. — Gand.
DELCROIX (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.
DELÉTREZ (Dr A.), 5, rue de la Charité. — Bruxelles.
DE LEYN (chan. A.), 52, rue du Marécage. — Bruges.
DELVIGNE (chan. Adolphe), curé de Saint-Josse-ten-Noode, 14, rue de la Pacification. — Bruxelles.
DEMANET (abbé), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, Collège du St-Esprit. — Louvain.

De Marbaix (Alph.), professeur à l'Université de Louvain, membre de l'Académie royale de médecine. — Meerhout.

De Meester (Augustin), propriétaire. — Saint-Nicolas.

Denys (Dr J.), professeur à l'Université catholique, 22, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 28, boulevard du Jardin-Botanique. — Bruxelles.

De Prins, place du Peuple. — Louvain.

Desplats (docteur), professeur aux Facultés catholiques, 56, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.

De Tilly (général J.), de l'Académie royale de Belgique, commandant de l'École militaire. — Bruxelles.

Dever (Dr H.), 26, rue Belliard. — Bruxelles.

Dewalque (François), professeur à l'Université, 26, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dewalque (Gustave), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 17, rue de la Paix. — Liége.

Dewèvre (Alfred), docteur en sciences naturelles, 82, chaussée de Wavre. — Ixelles.

D'Hondt (Frédéric), directeur du Laboratoire communal. — Courtrai.

Dierckx, S. J. (R. P. François), professeur de sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Dierckx (P.), membre de la Chambre des représentants. — Turnhout.

de Dorlodot (chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université catholique, 18, rue Léopold. — Louvain.

de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux, par Floreffe (Namur).

Drion (Bon Adolphe), fils, avocat. — Gosselies.

Dugniolle (Max), professeur à l'Université, 45, Coupure. — Gand.

Duhem (Pierre), professeur de physique à la Faculté des sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumont (Achille), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Dumont (André), professeur à l'Université, 13, rue de la Laie. — Louvain.

Durant (Henri), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

Du Roussaux (S. G. Mgr), évêque de Tournay.
Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.
Dutordoir (Hector), ingénieur en chef directeur du service technique provincial, 375, boulevard du Château. — Gand.
École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard, Paris.
École libre Sainte-Geneviève, rue Lhomond. — Paris.
de l'Escaille (Joseph), ingénieur. — Hamont, par Neerpelt (Limbourg).
Eynaud (L.), ingénieur de la marine, directeur des constructions navales, 2, place de l'Alma. — Cherbourg (Manche — France).
Fagnart (Émile), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée royal, 14, rue de l'Évêché. — Gand.
Faucon (A.), docteur en médecine. — Le Rœulx.
de Favereau de Jennerет (B^on), rue Bonne-Fortune, Liége.
Fernandez Sanchez (José), catedrático de Historia universal en la Universidad. — Santiago (Galice — Espagne).
Ferrata (S. G. Mgr), archevêque de Thessalonique, nonce du Saint-Siége, 58, rue de Varennes. — Paris.
Ferron (Eug.), commissaire près du Gouvernement grand-ducal près les chemins de fer, 8, rue de la Porte-Neuve. — Luxembourg (Grand-Duché).
Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), calle de Isabel la Católica, 12. — Madrid (Espagne).
Foerster (D^r), professeur d'histoire naturelle. — Aix-la-Chapelle.
Folie (F.), membre de l'Académie royale et directeur de l'Observatoire royal de Belgique. — Uccle.
Forni (Cte Paul). — Bozen (Tyrol — Autriche).
de Foville (abbé), professeur à l'Université, au Séminaire. — Montréal (Canada).
Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.
de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.
Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins. — Paris.
Gautier (chanoine), 21, rue Louise. — Malines.
George, S. J. (R. P. Charles), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Giannuzzi (Mgr Venceslao), vià Ufficii del Vicario, 30. — Rome.
Gilbert (Paul), ingénieur, rue Gambetta. — Givet (Ardennes — France); ou Heer-Agimont, par Dinant.
Gilson, professeur à l'Université, 1, avenue de la Place-d'Armes. — Gand.
Glorieux (Dr), 36, rue Jourdan. — Bruxelles.
Goedseels (Édouard), capitaine, professeur à l'École de guerre, 8, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.
Goix (Alph.), docteur en médecine, 40, rue de Joinville. — Paris.
Goossens (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.
Goossens, S. J. (R. P. Fernand), 11, rue des Récollets. — Louvain.
Goris (Charles), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.
Grandmont (Alphonse), avocat. — Cortessem (Limbourg); ou Taormina (Sicile).
Grinda (Jesús), ingénieur des ponts et chaussées, Valverde, 22, 2e. — Madrid (Espagne).
Grisar (Armand), docteur en sciences physiques et mathématiques, avenue Rubens. — Anvers.
de Grossouvre (A.), ingénieur en chef des mines. — Bourges (Cher — France).
Gustave (Monsieur), supérieur général des Joséphites. — Grammont.
Guyétand, directeur de l'École libre de Mont-Roland. — Dôle (Jura — France).
Hagen, S. J. (R. P.), Georgetown College Observatory. — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique).
Hahn, S. J. (R. P. Guillaume), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
Hamard (Chanoine), 6, rue du Chapitre. — Rennes, Ille-et-Vilaine — France).
de Harlez (Mgr), professeur à l'Université, 8, rue au Vent. — Louvain.
Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, inspecteur général des mines, directeur de l'École des mines, 60, boulevard Saint-Michel. — Paris.
de la Haye (Auguste), major au 13e régiment de ligne, 9, boulevard de Meuse. — Jambes (Namur).
Helleputte (G.), membre de la Chambre des représentants, professeur à l'Université catholique. — Vlierbeek lez-Louvain.

de Hemptinne (Alexandre), 52, rue des Meuniers. — Gand.

de Hemptinne (Cte Joseph), fils, 31, rue Charles-Quint. — Gand, ou Tamise (Flandre Orientale).

Henry (Hector). — Dinant.

Henry (Louis), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), docteur en sciences naturelles, professeur à l'Université, 2, rue du Manège. — Louvain.

Hermite (Charles), membre de l'Institut, 2, rue de Sorbonne. — Paris.

Hervier (abbé Joseph), 31, grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heymans (J.-F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 35, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Heynen (W.), membre de la Chambre des représentants. — Bertrix (Luxembourg) et 85, rue du Commerce, Bruxelles.

Houtart (Bon Jules). — Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

Houze (Octave), docteur en médecine. — Binche.

Humbert, ingénieur des mines, répétiteur à l'École polytechnique, 16, boulevard Malesherbes. — Paris.

Huybrechts (Dr Th.), 61, rue des Fabriques. — Bruxelles.

Icazbalceta (Joaquín García), apartado del correo 366. — México (Mexique, viâ New-York).

Illescas (Juan), calle de la Compañia, 16. — Puebla (Mexique, viâ New-York).

Iñiguez e Iñiguez (Francisco), catedratico de Astronomia en la Universidad, calle de Isabel la Católica, 4, bajo. — Madrid (Espagne).

Institut Saint-Ignace. — Anvers.

Jacobs (Mgr), curé-doyen de Sainte-Gudule. — Bruxelles.

Jacopssen, S. J. (R. P. Raymond), 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Jenner (Ch. I.), ingénieur en chef des ponts et chaussées, directeur des travaux hydrauliques de la marine, 38, rue de la Rampe. — Brest (Finistère — France).

Jimeno (Joaquin), ingeniero de caminos. — Castellon de la Plana (Espagne).

Joly (Albert), avocat à la cour d'appel, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), avocat, 18, rue de Suisse. — Bruxelles.

de Jonquières, vice-amiral, membre de l'Institut, 2, avenue Bugeaud. — Paris.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, 48, rue de Varenne. — Paris.

Jourdain (Louis), ingénieur, 19, rue Léopold. — Bruxelles.

Julin (Armand), 9, rue du Berger. — Bruxelles.

Kimus (abbé), Collège du Saint-Esprit. — Louvain.

Kirsch (R. P. Alexandre-M.), C. S. C. — Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

de Kirwan (Charles), ancien inspecteur des forêts, 4, Cité Vaneau. — Paris.

Kurth (Godefroid), professeur à l'Université, 6, rue Rouvroy. — Liége.

Lacor (E.), professeur de mathématiques à l'École Sainte-Geneviève, 96, boulevard Montparnasse. — Paris.

Lagasse (Alexandre), 4, rue Saint-Maurice. — Nivelles.

Lagasse-de Locht (Charles), ingénieur en chef directeur des ponts et chaussées, membre du Conseil supérieur du Travail, 61, rue du Conseil. — Bruxelles.

Lahousse (Dr), professeur à l'Université, 27, Coupure. — Gand.

Lamarche (Émile), 81, rue Louvrex. — Liége.

Lambert (Camille), ingénieur en chef des chemins de fer de l'État, 69, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Lambiotte (Omer), ingénieur aux charbonnages de Fontaine-l'Évêque.

Lambiotte (Victor), ingénieur, directeur-gérant aux charbonnages d'Oignies-Aiseau, par Tamines (Namur).

Lamy (Mgr), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université catholique, 149, rue des Moutons. — Louvain.

de Lapparent (A.), membre correspondant de la Société géologique de Londres, professeur à l'Institut catholique, 3, rue de Tilsitt. — Paris.

Lechalas (G.), ingénieur en chef des ponts et chaussées. — Rouen (Seine-Inférieure — France).

Leclercq (Jules), 25, avenue de l'Astronomie — Bruxelles.

Leconte (Félix), 10, rue du Lac. — Gand.

Ledresseur (Charles), docteur en médecine, professeur à l'Université, 79, voer des Capucins. — Louvain.

LEFEBVRE, docteur en médecine, professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, sénateur, 36, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (chan. Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

LEFEBVRE (abbé Maurice), docteur en sciences naturelles, professeur au Collège Saint-Joseph. — Virton.

LE HIR (abbé Daniel), aumônier de la Maison des Oiseaux, 86, rue de Sèvres. — Paris.

LEIRENS-ÉLIAERT, rue du Pont. — Alost.

LEJEUNE-SIMONIS, château de Sohan par Pepinster (Liége).

LEMOINE (Georges), ingénieur en chef des ponts et chaussées, examinateur de sortie pour la chimie à l'École polytechnique, 76, rue d'Assas. — Paris.

LE PAIGE (C.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, plateau de Cointe. — Liége.

LERAY (R. P. A.), 23, rue des Fossés St-Jacques. — Paris.

DE LIEDEKERKE (Cte Charles), 30, rue de l'Industrie. — Bruxelles.

DE LIEDEKERKE DE PAILHE (Cte Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Adolphe), 15, rue du Commerce. — Bruxelles.

DE LIMBURG-STIRUM (Cte Samuel), 25, rue d'Idalie. — Bruxelles.

LIMPENS (Émile), avocat, place Impériale. — Alost.

DE LOCHT (Léon), ingénieur, Mont-Saint-Martin. — Liége.

LOHEST (Paul), ingénieur civil, président de la Fédération des œuvres ouvrières, 2, rue Rouvroy. — Liége.

LUCAS, S. J. (R. P. Désiré), docteur en sciences physiques et mathématiques, Collège N.-D. de la Paix, rue de Bruxelles. — Namur.

MAERTENS (chan.), professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Nicolas.

MALCORPS (Ernest), avocat, 20, rue des Chariots. — Louvain.

MALISOUX (Émile), ingénieur principal de 1re classe des mines, 11, rempart ad aquam. — Namur.

MANGANO (Vincent), avocat, 51, rue Cavour. — Palerme (Sicile).

MANSION (Paul), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de Belgique, 6, quai des Dominicains. — Gand.

MARLIN (J.), docteur en philosophie et lettres, 16, rue Charles-Morren. — Liége.

MARTENS (Édouard), professeur à l'Université, 27, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

MARTINEZ Y SAEZ (Francisco de Paula), professeur de zoologie au Musée d'histoire naturelle, calle de San Quintin, 6, pral, izq. — Madrid (Espagne).

MAS, S. J. (R. P. Tomâs), Rector del Seminario Conciliar. — San Luis Potosí (Mexique).

MASOIN (E.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 15, Marché-au-Poisson. — Louvain.

MATAGNE (Henri), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

MATAGNE (Jules), docteur en médecine, 21, rue de la Fontaine. — Bruxelles.

DE MAUPEOU (Cte), ingénieur de la marine, 3, rue du Commerce. — Lorient (Morbihan — France).

MEESSEN (Dr Wilhelm), 28, place Jourdan. — Bruxelles.

DE MEEUS (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

MERCIER (Mgr D.), professeur à l'Université, 1, rue des Flamands. — Louvain.

DE MÉRODE-WESTERLOO (Cte), ministre des affaires étrangères. — Bruxelles.

MEUNIER (abbé Alph.), professeur à l'Université, Collège Juste-Lipse. — Louvain.

MEUNIER (Fernand), 22, rue de la Paille. — Bruxelles.

MICHA, professeur à l'Université, 110, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

MIOT (Dr Léopold), de l'Académie royale de médecine, 10, rue Puissant. — Charleroi.

MIRANDA Y BISTUER (Julian), canónigo magistral de la catedral, Canongia nueva, 18. — Segovia (Espagne).

MISONNE (Lucien), directeur-gérant des charbonnages du Hasard. — Tamines (Namur).

MOELLER (Dr), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

MONCHAMP (abbé Georges), docteur en théologie et en philosophie, professeur au Petit-Séminaire. — Saint-Trond.

DE MOREAU D'ANDOY (Chev), 186, avenue Louise. — Bruxelles.

MORETUS (René), avenue Quentin-Metsys. — Anvers.

MULLENDERS (Joseph), ingénieur, 7, rue Renkin. — Liége.

DE NADAILLAC (Mis), 18, rue Duphot. — Paris.

NAVA DI BONTIFÈ (S. Exc. Mgr), archevêque d'Héraclée, Nonce du S. Siège en Belgique. — Bruxelles.

NEWTON (général John), 279, Adelphi Street. — Brooklyn, New-York.

NICOTRA (Mgr Sébastien), secrétaire du Nonce apostolique, 214, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

NISOT (Victor), ingénieur, docteur en sciences physiques et mathématiques, 53, rue de Montigny. — Charleroi.

NOLLÉE DE NODUWEZ, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, 146, rue Royale. — Bruxelles.

NYSSENS (Albert), professeur à l'Université, membre de la Chambre des représentants, 115, rue de la Station. — Louvain.

NYSSENS (Pierre), directeur au laboratoire agricole de l'État, 21, rue Sainte-Marguerite. — Gand.

OBESO, S. J. (R. P. Juan Manuel), profesor de matemáticas en el Colégio de Estúdios superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

D'OCAGNE (Maurice), professeur à l'école des ponts et chaussées, répétiteur à l'École polytechnique, 5, rue de Vienne. — Paris.

DE OLAVARRIA (Martial), ingénieur en chef des mines, secrétaire de la Commission de la carte géologique d'Espagne, Huertas, 82. — Madrid (Espagne).

ORBAN DE XIVRY, gouverneur de la province de Luxembourg. — Arlon.

PARDON (Gustave), ingénieur. — Quaregnon (Hainaut).

PASQUIER (Ern.), professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

PASTEUR (L.), membre de l'Institut, rue Dutot. — Paris.

PATRONI (Monsign. Giuseppe), dott. in filosofia, in teologia ed in ambe le leggi, 47, piazza del Gesù. — Rome.

PECHER (Eugène), 80, avenue Louise. — Bruxelles.

PEETERS (docteur), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournay.

PEPIN, S. J. (R. P. Théophile), École libre Saint-Michel. — Saint-Étienne (Loire — France).

PEREZ CAMPOS (José), Jefe de los tabajos estadisticos de la provincia, Casa de San Ignacio. — Azpeitia (prov. Guipuzcoa — Espagne).

DE PILLON DE S. PHILBERT (A.), 2, rue St-Thomas. — Douai (Nord — France).

PIRARD (Mgr), vicaire général, 6, boulevard Léopold. — Namur.

POISOT (Maurice), avocat, 4, rue Buffon. — Dijon (Côte-d'Or — France).

Proost (Alphonse), inspecteur général de l'agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 16, rue Anoul. — Bruxelles.

Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale extérieure. — Bruxelles.

Prudham (abbé), directeur du collège Stanislas, rue N.-D. des Champs. — Paris.

Quairier, 28, boulevard du Régent. — Bruxelles.

Rachon (abbé Prosper), curé de Ham et Saint-Jean, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

Raclot (abbé V.), aumônier des hospices et directeur de l'observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

Ranwez (D[r] A.), 2, rue de Gravière — Namur.

Ravain (abbé J.-R.), professeur à l'Université, 18, rue du Vollier. — Angers (Maine-et-Loire — France).

Recteur (R. P.) du collège Saint-François-Xavier, 10 et 11, Park Street. — Calcutta (Inde anglaise, viâ Brindisi).

Rector (R. P.) del Colegio del Jesús. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

Renard (abbé Alphonse), conservateur honoraire au Musée d'histoire naturelle, professeur à l'Université de Gand. — Wetteren (Flandre-Orientale).

de Ribaucourt (C[te]), sénateur, 27, rue de Loxum. — Bruxelles; ou château de Perck, par Vilvorde.

Richald (J.), ingénieur des ponts et chaussées, 39, rue Godefroid. — Namur.

Risueño (Emiliano Rodriguez), catedratico de Historia natural en la Universidad, calle Duque de la Victoria, 16 pral. — Valladolid (Espagne).

de la Roche de Marchiennes (Émile). — Harvengt par Harmignies (Hainaut).

de Rouillé (C[te]), 44, avenue des Arts. — Bruxelles.

Roussel (Lucien), professeur à l'École forestière, 11, rue de la Ravinelle. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).

de Salvert (V[te]), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 7, rue de la Bibliothèque. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loire — France).

de Santa Cruz (Ivan Armada Hernandez de Cordova, M[is]), 9, rua Nueva. — Santiago (Galice — Espagne).

Sanz (Pelegrin), ingeniero de caminos, Oficina de Obras públicas. — Tarragona (Espagne).

de Sauvage (Cte), 22, avenue de Friedland. — Paris.

Schaffers, S. J. (R. P. Victor), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur au collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Scarsez de Locqueneuille (Anatole), château de St-François. — Farciennes (Hainaut); ou 84, rue de Stassart. — Ixelles.

Schmitz, S. J. (R. P. Gaspar), collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Schobbens, docteur en médecine, 49, longue rue Neuve. — Anvers.

Schoemaker (W.-J.), professeur à l'École moyenne. — Nimègue (Pays-Bas).

Sibenaler, professeur à l'Université catholique, 76, chaussée de Namur. — Héverlé-Louvain.

Simart, lieutenant de vaisseau, répétiteur à l'École polytechnique, 70, rue Miromesnil. — Paris.

Simon (Dr J.-B.), 108, rue Haute. — Bruxelles.

Simonis (Alfred), sénateur. — Verviers.

Simonis (Louis), industriel. — Verviers.

Siret (Henri), ingénieur, 49, rue du Grand-Chien. — Anvers.

Siret (Louis), ingénieur. — Cuevas (prov. Almeria — Espagne).

Smekens (Théophile), président du tribunal de 1re instance, 31, avenue Quentin-Metsys. — Anvers.

Smets (abbé Gérard), docteur en sciences naturelles, professeur de sciences au collège St-Joseph. — Hasselt.

del Socorro (José Maria Solano, Mes), professeur de géologie au Musée d'histoire naturelle, calle de Jacometrezo, 41, bajo. — Madrid (Espagne).

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur à l'Athénée grand-ducal, 8, rue des Capucins. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solvyns (Albert), 5, rue de la Science. — Bruxelles.

Soreil, ingénieur. — Maredret sous Sosoye, par Anthée (Namur).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins (Rhône — France).

SPINA, S. J. (R. P. Pedro), Colegio católico del Sagrado Corazón de Jesús, sacristia de Capucinas, núm. 5. — Puebla (Mexique).

SPRINGAEL (Auguste), ingénieur, 82, rue Washington. — Bruxelles.

STAINIER (Xavier), professeur à l'Institut agricole de Gembloux, membre de la Commission géologique de Belgique, rue Pierquin. — Gembloux.

VAN DEN STEEN DE JEHAY (Cte Frédéric), attaché au Cabinet du Roi, 13, rue de la Loi. — Bruxelles.

STILLEMANS (S. G. Mgr), évêque de Gand.

STINGLHAMBER (Émile), docteur en droit, 31, rue des Minimes. — Bruxelles.

STORMS (abbé Camille), curé de Ganshoren, par Jette (Brabant).

STORMS (John), 37, rue des Champs-Élysées. — Bruxelles.

STORMS (Raymond), 13, rue du Président. — Bruxelles.

VAN DER STRATEN-PONTHOZ (Cte François), 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

STRUELENS (Alfred), docteur en médecine, 18, rue de l'Hôtel-des-Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

SUCHETET (André), 10, rue Alain Blanchard. — Rouen; ou Antiville-Beauté par Goderville (Seine-Inférieure — France).

SURBLED (Dr). — Corbeil (Seine-et-Oise — France).

SWISSER (Dr H.), 45, rue Lefrancq. — Bruxelles.

SWOLFS (Dr), 18, boulevard Léopold. — Namur.

SWOLFS (chan.), inspecteur diocésain, 46, avenue Van Beneden. — Malines.

TAYMANS (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

TEIXEIRA (Gomes), directeur de l'École polytechnique. — Porto (Portugal).

TERCELIN (Félix), rue du Mont-de-Piété. — Mons.

THÉRON, docteur en sciences physiques et mathématiques, à l'Athénée, rue de la Constitution. — Malines.

THEUNIS (Auguste), répétiteur à l'Université, 10, rue des Dominicains. — Louvain.

THIBAUDIER, ingénieur de la marine. — Rochefort-sur-Mer (Charente-Inférieure — France).

THIÉBAULD (Charles), avocat, 60, rue Saint-François. — Bruxelles.

THIÉRY (Armand), Institut des Hautes-Études, 1, rue des Flamands — Louvain.

THIRION, S. J. (R. P.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

THIRY (Fr.), secrétaire de l'Association conservatrice cantonale de Templeuve. — Pecq (Hainaut).

TILMAN (Firmin), ingénieur, à Aiseau par Tamines (Namur).

TIMMERMANS (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 22, rue de Fragnée. — Liége.

TORROJA Y CABALLÉ (Eduardo), architecte, professeur à la Faculté des sciences de l'Université, calle de Lope de Vega, n°s 13 y 15, c^{to} 3e dra. — Madrid (Espagne).

TRAS, S. J. (R. P.), professeur au collège N.-D. de la Paix. — Namur.

DE TRAZEGNIES (Mis). — Corroy-le-Château, par Gembloux; ou 23, rue de la Loi. — Bruxelles.

DE T'SERCLAES (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

DE T'SERCLAES (Cte Jacques), capitaine d'état-major, professeur à l'École de guerre, 26, rue de l'Abbaye. — Bruxelles.

T'SERSTEVENS (Léon), 43, boulevard Bischoffsheim. — Bruxelles; ou Baudemont par Virginal.

TYKORT (Émile), ingénieur civil, professeur de chimie agricole et d'agronomie à l'Université de Louvain. — Perck, par Vilvorde.

D'URSEL (Cte Aymard), capitaine d'artillerie, château de Bois-de-Samme, par Wauthier-Braine (Brabant).

DE LA VALLÉE POUSSIN, de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J.), professeur à l'Université, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Joseph), avocat, 190, rue de Namur. — Louvain.

DE LA VALLÉE POUSSIN (Louis), chargé de cours à l'Université, 18, rue longue de la Monnaie. — Gand.

VAN AERTSELAER (chan.), directeur de l'Institut St-Louis, 121, rue du Marais. — Bruxelles.

VAN AUBEL, professeur de physique à l'Université de Gand, 12, rue de Comines. — Bruxelles (quartier Léopold).

VAN DEN GHEYN (chan. Gabriel), supérieur à l'Institut Saint-Liévin. — Gand.

VAN DEN GHEYN, S. J. (R. P. Joseph), bollandiste, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

VANDENPEEREBOOM (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

VANDENPEEREBOOM (Jules), ministre des chemins de fer, postes et télégraphes. — Bruxelles.
VAN DER MENSBRUGGHE, membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 131, Coupure. — Gand.
VANDERRYST, inspecteur adjoint de l'agriculture. — Tongres.
VAN DER SMISSEN (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége, 16, rue du Gouvernement-Provisoire — Bruxelles.
VANDERSTRAETEN (Dr A.), 68, rue du Trône. — Bruxelles.
VAN DE WOESTYNE (chan.), professeur au Grand-Séminaire.— Bruges.
VAN DROMME, docteur en médecine, rue des Chartreuses. — Bruges.
VAN HOECK (Dr Ém.), 11, rue Traversière. — Bruxelles.
VAN KEERBERGHEN, docteur en médecine, 15, rue du Trône. — Bruxelles.
VANNUTELLI (S. É. le cardinal Serafino). — Rome.
VAN ORTROY (Fernand), capitaine au 4e lanciers, 37, quai des Moines. — Gand.
VAN OVERLOOP (Eugène), sénateur, 58, rue Royale. — Bruxelles.
VAN SEGVELT (Edmond), 9, place Ragheno. — Malines.
VAN TRICHT, S. J. (R. P. Victor), 11, rue des Récollets. — Louvain.
VAN ZEEBROECK (abbé), directeur à l'Établissement des Sœurs-Grises. — Diest.
VAN ZUYLEN-ORBAN (Gust.), industriel, 8, quai de l'Industrie. — Liége.
VAULTRIN, inspecteur des forêts, 2, rue de Lorraine. — Nancy (Meurthe-et-Moselle — France).
VENNEMAN, docteur en médecine, professeur à l'Université, 35, rue du Canal. — Louvain.
VERCRUYSSE (Victor), 17, rue de France. — Courtrai.
VERHELST (abbé F.), professeur au collège Saint-Jean-Berchmans, 36, place de Meir. — Anvers.
VERRIEST (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.
VICAIRE (Eugène), ingénieur en chef des mines, 30, rue Gay-Lussac. — Paris.
VICENT, S. J. (R. P. Antonio), Colegio de San José. — Valencia (Espagne).
VILAIN XIIII (Vte), sénateur, 11, rue du Trône. — Bruxelles.
VISART DE BOCARMÉ (Cte Amédée), membre de la Chambre des représentants, bourgmestre de Bruges.

VISART DE BOCARMÉ, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur

VOLLEN (E.), docteur en droit, rue de Paris. — Louvain.

DE VORGES (Cte E. Domet), 46, rue du Général-Foy. — Paris.

VUYLSTEKE, professeur à l'Université, 20, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

WALRAVENS (abbé Adelson), directeur du collège Saint-Julien. — Ath.

WARLOMONT (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de bataillon au 3e lanciers, 19, rue des Frères-Mineurs. — Bruges.

WAUTELET (A), ingénieur à l'usine à gaz. — Roubaix (Nord — France).

DE WAVRIN (Mis), château de Ronsele, par Somergem (Flandre-orientale).

DE WECK (abbé A.), missionnaire apostolique. — Fille-Dieu-sous Romont (canton de Fribourg — Suisse).

WÉRY (D^r^). — Sclayn par Namèche (Namur).

WÉRY (Vincent), président du tribunal de 1re instance, 4, rue des Telliers. — Mons.

WILMOTTE (abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe (Namur).

WITZ (Aimé), professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

WOLF, membre de l'Institut, 95, rue des Feuillantines. — Paris.

DE WOUTERS (chan.). — Braine-le-Comte.

WOUTERS (abbé Louis), professeur de sciences naturelles au collège Saint-Rombaut. — Malines.

ZAHM (R. P. J.-A.), C. S. C., professeur à l'Université. — Notre-Dame (Ind., États-Unis d'Amérique).

ZECH (Guillaume), négociant. — Braine-le-Comte.

Liste des membres décédés.

(Janvier 1894 — avril 1895.)

Pce BONCOMPAGNI (Balthasar) . . . . Rome.
JANNET (Claudio). . . . . Paris.
MONSARRAT (G.) . . . . Paris.
PETIT (chan.). . . . . Namur.
SABY (Henri). . . . . Renaix.
VAN DER VOORDT (Jules) . . . . Anvers.

Listes des membres inscrits dans les sections.

1re Section.

Mathématiques, Astronomie, Géodésie. — Mécanique. — Génie civil et militaire.

MM. d'Abbadie.
Adan de Yarza.
Chan. di Bartolo.
Baule.
Boussinesq.
du Boys.
Breithof.
de Bussy.
Carnoy.
Abbé Clasen.
Abbé Coppieters de Stockhove.
Cousin.
De Tilly.
Dusausoy.
Dutordoir.
Eynaud.
Fagnart.
Folie.
Gauthier-Villars.

MM. Goedseels.
Grisar.
de Grossouvre.
Guyétand.
Hagen.
Haton de la Goupillière.
Hermite.
Humbert.
Iñiguez.
Jenner.
Jimeno.
Amiral de Jonquières.
Camille Jordan.
Lacor.
Charles Lagasse.
Lambert.
Lechalas.
Le Paige.
Cte Charles de Liedekerke.

MM. Mansion.
C[te] de Maupeou.
Micha.
Nisot.
P. Nysseus.
d'Ocagne.
Olavarria.
Pasquier.
R. P. Pepin, S. J.
Richald.
V[te] de Salvert.
Pelegrin Sanz.
R. P. Schaffers, S. J.
Sibenaler.
Simart.

MM. Soisson.
C[te] de Sparre.
R. P. Spina, S. J.
Teixeira.
Théron.
R. P. Thirion, S. J.
Timmermans.
Torroja.
C[te] Jacques de T'Serclaes.
C[te] Aymard d'Ursel.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Abbé Van Zeebroeck.
Vicaire.

2[e] Section.

Physique. — Chimie. — Métallurgie. — Météorologie et Physique du Globe.

MM. Amagat.
André.
R. P. Bareel, S. J.
Béchamp.
Blondel.
Bonamis.
Branly.
Bruylants.
Chautard.
Abbé Coupé.
R. P. De Greeff, S. J.
Delacre.
Abbé Demanet.
De Preter.
François Dewalque.
R. P. Dierckx, S. J.

MM. Duhem.
Dumas-Primbault.
André Dumont.
Ferron.
R. P. George, S. J.
R. P. Goossens, S. J.
Hector Henry.
Louis Henry.
Paul Henry.
R. P. Jacopssen, S. J.
Omer Lambiotte.
Victor Lambiotte.
Leconte.
Lemoine.
R. P. Lucas, S. J.
R. P. Leray.

MM. Malisoux.
Misonne.
Mullenders.
Chan. Pirard.
Abbé Raclot.
Abbé Ravain.
Springael.
Theunis.
Thiry.

MM. Tilman.
R. P. Tras, S. J.
Tykort.
Van Aubel.
Van der Mensbrugghe.
R. P. Van Tricht, S. J.
Abbé Verhelst.
Witz.
R. P. Zahm.

3e Section.

Géologie, Minéralogie. — Botanique. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie, Ethnographie, Science du langage. — Géographie.

Mgr Abbeloos.
MM. d'Acy.
Fr. Alexis.
Arcelin.
Arrilucea.
Ballion.
Abbé Bardin.
Mis de la Boëssière-Thiennes.
R. P. Bolsius, S. J.
Abbé Boulay.
Abbé Bourgeat.
Anatole Buisseret.
Joseph Buisseret.
R. P. Camboué, S. J.
Chanoine De Brouwer.
Delaroyère.
Chanoine Delvigne.
Gustave Dewalque.
Dewèvre.
Bon Drion.
Chanoine de Dorlodot.
Dugniolle.
R. P. Fita, S. J.
Foerster.

MM. Abbé de Foville.
Grinda.
Chanoine Hamard.
Cte de Hemptinne.
Abbé Hervier.
Heynen.
R. P. Kirsch.
de Kirwan.
Kürth.
A. de Lapparent.
Leclercq.
Chan. Ferdinand Lefebvre.
Abbé Maurice Lefebvre.
Abbé Le Hir.
Cte Adolphe de Limburg-Stirum.
Marlin.
Édouard Martens.
Henri Matagne.
Abbé Meunier.
Fernand Meunier.
Abbé Monchamp.
Mis de Nadaillac.
Abbé Rachon.
Abbé Renard.

MM. Risueño.
Ém. de la Roche.
Roussel.
Scarsez de Locqueneuille.
R. P. Schmitz, S.J.
H. Siret.
L. Siret.
Abbé Smets.
Mis del Socorro.
Albert Solvyns.
Stainier.
John Storms.
Raymond Storms.
Suchetet.
Chanoine Swolfs.

MM. de la Vallée Poussin.
Jos. de la Vallée Poussin.
Louis de la Vallée Poussin.
R. P. Van den Gheyn, S. J.
Chan. G. Van den Gheyn.
Vanderryst.
Van Ortroy.
Van Overloop.
Van Segvelt.
Vaultrin.
R. P. Vicent, S. J.
de Vorges.
Mis de Wavrin.
Abbé Wouters.

4e Section.

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Borginon.
Cuylits.
Debaisieux.
De Buck.
Degive.
Dr De Lantsheere.
Delcroix.
Delétrez.
Denys.
Desplats.
Dever.
Achille Dumont.
Faucon.
Francotte.
Gilson.
Glorieux.
Goix.
Goris.
R. P. Hahn, S. J.

MM. Heymans.
Houze.
Huyberechts.
Alexandre Lagasse.
Lahousse.
Ledresseur.
Dr Lefebvre.
Masoin.
Jules Matagne.
Meessen.
Miot.
Mœller.
Proost.
Ranwez.
Schobbens.
Simon.
Struelens.
Surbled.
Swisser.

MM. Dr Swolfs.
Vanderstraeten.
Van Dromme.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
MM. Venneman
Verriest.
Warlomont.
Dr Wéry.

5e Section.

Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales Économie industrielle.

MM. Berleur.
Bouillot.
Cartuyvels.
Pce Juste de Croy.
Davignon.
De Baets.
Camille De Jaer.
Léon De Lantsheere.
De Marbaix.
D'Hondt.
Grandmont.
Bon Houtart.
Armand Joly.
Léon Joly.
Julin.
Cte Édouard de Liedekerke.
Limpens.
Mangano.
MM. de Mérode.
de Moreau d'Andoy.
Mgr Nicotra.
MM. Pecher.
Peeters.
Perez Campus.
Smekens.
Stinglhamber.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
t'Serstevens.
van den Steen de Jehay.
Van der Smissen.
van Zuylen-Orban.
Vte Vilain XIIII.
Cte Amédée Visart.
Visart
Abbé Walravens
Vincent Wéry.

MEMBRES DU CONSEIL.

1893-1894.

Président d'honneur, M. Ch. Hermite.

Président, M. L. Henry.
1er *Vice-Président*, M. E. Vicaire.
2e *Vice-Président*, M. le chanoine Delvigne.
Secrétaire, M. P. Mansion.
Trésorier, M. Jules De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
Général De Tilly.
Fr. Dewalque.
G. Dewalque.
André Dumont.
É Goedseels.
Godefroid Kurth.
Ch. Lagasse.
Dr Lefebvre.
Dr Moeller.
A. Proost
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Chanoine Swolfs.
L. t'Serstevens.
Ch. de la Vallée Poussin.

MEMBRES DU CONSEIL.

1894 - 1895.

—

Président, M. Léon t'Serstevens.

1er *Vice-Président*, M. le Dr Desplats

2e *Vice-Président*, M. Fr. Dewalque.

Secrétaire, M. P. Mansion.

Trésorier, M. J De Bruyn.

MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes.
Chanoine Delvigne.
Général De Tilly.
G Dewalque.
André Dumont.
É. Goedseels.
Louis Henry.
Godefroid Kurth.
Ch. Lagasse.
Dr Lefebvre.
Dr Moeller.
A. Proost.
Cte Fr. van der Straten-Ponthoz.
Chanoine Swolfs.
de la Vallée Poussin.

BUREAUX DES SECTIONS.

1893 - 1894.

1re Section.

Président, M. d'Ocagne.
Vice-Présidents, MM. E. Pasquier et Cl. Dusausoy.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, R. P. Thirion.
Vice-Présidents, MM. Fr. Dewalque et G. Van der Mensbrugghe.
Secrétaire, M. F. Leconte.

3e Section.

Président, R. P. Bolsius.
Vice-Présidents, MM. A. de Lapparent et le Mis de Trazegnies.
Secrétaire, R. P. Van den Gheyn.

4e Section.

Président, M. J. Cuylits.
Vice-Présidents, MM. E. Masoin et G. Borginon.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, Mgr Nicotra.
Vice-Présidents, MM. le Cte Fr. van der Straten-Ponthoz
et A. De Marbaix.
Secrétaire, M. Arm. Julin.

BUREAUX DES SECTIONS.

1894-1895.

—

1re Section.

Président, M. G. Humbert.
Vice-Présidents, MM. C. Le Paige et J. Carnoy.
Secrétaire, M. Dutordoir.

2e Section.

Président, M. Van der Mensbrugghe.
Vice-Présidents, MM. Fr. Dewalque et R. P. Lucas.
Secrétaire, M. l'abbé Coupé.

3e Section.

Président, R. P. Bolsius.
Vice-Présidents, MM. le Mis de Trazegnies et A. de Lapparent.
Secrétaire, R. P. Van den Gheyn.

4e Section.

Président, M. J. Cuylits.
Vice-Présidents, MM. E. Masoin et G. Borginon.
Secrétaire, M. Ach. Dumont.

5e Section.

Président, M. le Cte van der Straten-Ponthoz.
Vice-Présidents, MM. De Marbaix et Éd. Van der Smissen
Secrétaire, M. Arm. Julin.

SESSION DU JEUDI 26 OCTOBRE 1893
A NAMUR

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin lit le rapport suivant sur le mémoire de Ph. Gilbert, intitulé : *Sur l'emploi des cosinus directeurs de la normale dans la théorie de la courbure des surfaces.*

« Nous avons retrouvé, dans les papiers de notre ancien maître, une série de recherches intéressantes, groupées sous le titre que nous venons de transcrire. Le texte du manuscrit n'indique pas de subdivision, cependant le travail se compose en réalité de deux parties distinctes.

Dans la première partie, l'auteur transforme les principales équations qui se rencontrent dans la théorie de la courbure des surfaces, en exprimant les quantités qui figurent dans ces équations en fonction des cosinus directeurs de la normale. Il fait ressortir la simplicité et la symétrie que l'on introduit par là dans les résultats, et rencontre accessoirement quelques résultats nouveaux et curieux.

La seconde partie du travail, qui semble inachevée, ne répond pas parfaitement au titre indiqué, elle contient une série d'applications de la formule de Stokes.

L'auteur commence par établir la formule ordinaire de Stokes, il la généralise ensuite, par une méthode qui a fait l'objet d'une de ses dernières communications à la Société scientifique de Bruxelles (*Annales*, 1892, t. XVI, 1re partie, pp. 2-4). Il déduit

successivement de ces deux formules (la formule de Stokes et la formule généralisée) une série de résultats intéressants pour l'analyse et la physique mathématique. Cette seconde partie est la plus originale, elle groupe autour d'un même principe nombre de théorèmes qui semblent de prime abord sans aucun lien, l'auteur les obtient tous en précisant successivement de différentes manières les indéterminées qui entrent dans la formule générale, et en interprétant les relations qui en résultent. Nous ne pouvons songer à entrer dans plus de détails au sujet de la seconde partie du travail de Ph. Gilbert, car nous serions amené à donner à notre rapport des dimensions égales à celles du mémoire lui-même; nous nous contenterons de faire une analyse plus complète de la première partie.

L'auteur se place d'abord au point de vue suivant : il suppose que l'équation de la surface soit mise sous la forme

$$z = f(x, y);$$

il désigne, comme d'habitude, par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de $f(x, y)$ par rapport à x et y; enfin il représente par X, Y, Z les expressions des cosinus directeurs de la normale en fonction de x et de y seulement.

Il calcule dans cette hypothèse les valeurs de p, q, r, s, t en fonction de X, Y, Z et de leurs dérivées partielles par rapport à x et à y; puis il introduit les valeurs trouvées dans les principales équations qui se rencontrent dans la théorie de la courbure des surfaces. Il trouve ainsi :

1° Pour l'équation différentielle des lignes de courbure :

$$\frac{\partial X}{\partial y} dy^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dx dy - \frac{\partial Y}{\partial x} dx^2 = 0;$$

2° Pour les équations caractéristiques d'un ombilic :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} = 0;$$

3° Pour l'équation qui a pour racines les courbures principales $\frac{1}{R'}$ et $\frac{1}{R''}$:

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right) = 0 \quad (*).$$

De la considération de cette dernière équation, Ph. Gilbert tire deux équations fondamentales pour la suite du mémoire :

(1) . . . . . . $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$,

(2) . . . . $\frac{1}{R'R''} = D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right)$.

Ces équations renferment le théorème suivant :

La valeur des expressions $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$, $D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right)$ *en un point d'une surface ne varie pas, quel que soit le système d'axes coordonnés rectangulaires auquel on rapporte la surface.*

Viennent ensuite deux applications intéressantes de la formule (1) :

La première donne le théorème d'Euler sur la courbure de deux sections normales rectangulaires.

La seconde établit une certaine relation entre une intégrale superficielle et une intégrale curviligne, qui trouve son application dans la théorie des phénomènes capillaires.

Les relations (1) et (2) qui précèdent ont été établies, avons-nous dit, dans l'hypothèse où X, Y et Z étaient exprimés en fonction de x et y seulement, z étant éliminé au moyen de l'équation de la surface. Il est intéressant de savoir ce que deviennent ces relations dans l'hypothèse contraire.

Imaginons, avec l'auteur, que l'équation de la surface soit de la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

(*) L'expression $D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right)$ désigne le déterminant fonctionnel de X et Y par rapport à x et y.

et que les expressions des cosinus X, Y, Z soient données par les relations

$$X = \frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

les formules (1) et (2) prennent alors une forme toute différente, à savoir :

$$(3) \quad . \; . \; . \; . \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

$$(4) \quad . \; . \; . \quad \frac{1}{R'R''} = \frac{1}{Z}\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y}, & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{GZ} D\left(\frac{F, X, Y}{x, y, z}\right).$$

On remarque encore que les premiers membres étant indépendants du système d'axes, les seconds le seront aussi. En particulier, ils ne doivent pas changer par une permutation circulaire (X, Y, Z), (x, y, z). De là résulte un théorème remarquable sur les déterminants fonctionnels :

$$\frac{1}{X} D\left(\frac{F, Y, Z}{x, y, z}\right) = \frac{1}{Y} D\left(\frac{F, Z, Y}{x, y, z}\right) = \frac{1}{Z} D\left(\frac{F, X, Y}{x, y, z}\right).$$

La première partie du travail se termine par une application importante des formules (1) et (3) dans la théorie des surfaces d'aire minima.

L'équation de ces surfaces est, comme on le sait,

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0;$$

par conséquent, suivant l'hypothèse où l'on se placera, cette

équation se transformera par les équations (1) ou (3) dans l'une des suivantes :

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

La première exprime que $X dy - Y dx$ est une différentielle exacte $d\psi$ et conduit par là très rapidement à l'équation des surfaces d'aire minima sous la forme même que Riemann leur a donnée.

Nous pouvons maintenant conclure. Le travail que nous venons d'analyser — comme l'auteur le reconnait lui-même — ne renferme peut-être pas un grand nombre de choses nouvelles, mais l'exposition en est originale et très intéressante. La simplicité et l'élégance des résultats rappellent l'attention sur un mode d'exposition de la théorie des surfaces tout à fait négligé, peut-être à tort. Nous croyons donc que la Société scientifique fera chose utile en publiant les recherches que nous venons de faire connaître, et, nous n'en doutons pas, bien des membres de cette Société seront heureux de pouvoir lire encore une fois dans nos *Annales* quelques pages du confrère éminent qu'ils ont perdu. »

Ces conclusions sont adoptées. Le travail de Gilbert sera imprimé dans la seconde partie des *Annales*.

M. Mansion communique une Note de M. de Salvert sur l'*addition des fonctions hyperelliptiques*, complément de celle qui a été publiée dans les *Annales*, 1893, t. XVII, 1re partie, pp. 70-79. Cette Note, trop étendue pour être publiée dans le compte rendu de la séance, sera aussi imprimée dans la seconde partie des *Annales* (*).

M. Mansion fait la communication suivante *Sur l'éliminant de deux équations algébriques :*

(*) M. de Salvert a introduit ultérieurement, dans cette Note, quelques remaniements.

L'éliminant dialytique ou éliminant de Sylvester de deux équations algébriques $F = 0$, $f = 0$ peut se transformer d'une manière simple en un produit des différences des racines des deux équations multiplié par une puissance des premiers coefficients de ces équations (*).

Pour le montrer, il suffira de supposer F seulement du troisième degré et f du quatrième, de sorte que

$$F = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3, \quad f = b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4.$$

Nous appelerons α, β, γ les racines de $F = 0$ et nous poserons

$$A_0 = a_0, \quad A_1 = a_1 + \alpha A_0, \quad A_2 = a_2 + \alpha A_1, \quad A_3 = a_3 + \alpha A_2 = 0 = F\alpha,$$
$$B_0 = b_0, \quad B_1 = b_1 + \alpha B_0, \quad B_2 = b_2 + \alpha B_1, \quad B_3 = b_3 + \alpha B_2,$$
$$B_4 = b_4 + \alpha B_3 = f\alpha.$$

Je dis que l'éliminant

$$E = a_0^4 f\alpha\, f\beta . f\gamma$$

est égal à l'éliminant dialytique des deux équations données, savoir :

$$S = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & & \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\ & & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\ & & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Pour le prouver, multiplions d'abord la première colonne par α, puis ajoutons-la à la seconde; multiplions la seconde

(*) Le théorème est connu depuis longtemps et a été démontré de bien des manières. Voir, par exemple, FAA DE BRUNO, *Théorie générale de l'élimination*, p. 27; GORDAN et KERSCHENSTEINER, *Invariantentheorie*, t. I, pp. 179 et suivantes.

colonne modifiée par α et ajoutons-les à la troisième, et ainsi de suite. Le déterminant S deviendra

$$S = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & & & & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & & & \\ & & A_0 & A_1 & A_2 & & \\ & & & A_0 & A_1 & A_2 & 0 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_4\alpha & B_4\alpha^2 \\ & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_4\alpha \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Retranchons l'avant-dernière ligne multipliée par α de la précédente, la dernière ligne multipliée par α de l'avant-dernière. Ces trois lignes deviendront

$$\begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\ & & B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4. \end{matrix}$$

Par suite, puisque

$$B_4 = f\alpha,$$

on a

$$S = f\alpha . S',$$

si

$$S' = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & & & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & & \\ & & A_0 & A_1 & A_2 & \\ & & & A_0 & A_1 & A_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant S' est l'éliminant dialytique de $f=0$ et de

$$\varphi x = \frac{Fx}{x-\alpha} = A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0.$$

On prouvera de même que $S' = f\beta . S''$, S'' étant l'éliminant

dialytique de $f = 0$ et de $\frac{\varphi x}{x-\beta} = 0$. Enfin, on trouve immédiatement $S'' = a_0^4 f\gamma$. Donc

$$S = a_0^4 f\alpha . f\beta . f\gamma = E.$$

M. Goedseels fait une communication *Sur la mesure du temps et le mouvement absolu* dont voici le résumé :

Les mouvements d'un point par rapport à des systèmes d'axes coordonnés varient avec les mouvements de chacun de ces systèmes par rapport aux autres. Par exemple, si un point M se meut uniformément et en ligne droite dans un système OXYZ, on peut déterminer autant de systèmes O'X'Y'Z' qu'on veut, par rapport auxquels les mouvements du même point M sont curvilignes, variés et même singuliers, c'est-à-dire dépourvus de vitesses et d'accélérations.

D'autre part, si le mouvement du point M, dans le système OXYZ, est uniforme, lorsqu'on mesure le temps d'une certaine manière, le même mouvement devient varié ou même singulier, lorsqu'on remplace la première mesure, t, du temps, par une autre, θ, telle que la dérivée $\frac{dt}{d\theta}$ varie avec θ ou n'existe pas. La trajectoire seule reste la même.

Il résulte de là que l'énoncé d'une loi de mouvement quelconque est dépourvu de toute signification précise, aussi longtemps qu'on n'a pas défini le mode de mesure du temps, et le système OXYZ, auxquels cet énoncé se rapporte.

Si l'on connaissait adéquatement les causes des phénomènes physiques, on pourrait reconnaître l'identité des phénomènes successifs à l'identité de leurs causes, et mesurer le temps en considérant comme égales les durées des phénomènes identiques. Du rapport d'égalité on passerait sans peine aux rapports fractionnaires et aux rapports incommensurables.

Comme nous ne connaissons les causes que par leurs effets, et les effets que par les mesures de leurs éléments constitutifs, notamment le temps mis par les effets à s'accomplir, il nous est impossible de constater l'identité de deux phénomènes sans mesurer leurs durées. Il en résulte que la définition de l'éga-

lité des durées par celle des phénomènes présente un cercle vicieux.

En astronomie, on mesure le temps de diverses manières et à l'aide de diverses unités. On y place les systèmes de comparaison OXYZ tantôt sur la terre, pour les mouvements dits apparents, tantôt sur l'équateur, tantôt sur l'écliptique, etc.

La loi de la gravitation universelle, qui est la base de la mécanique céleste, ne correspond en toute rigueur ni à aucune des mesures du temps ni à aucun des systèmes définis en astronomie. On admet néanmoins implicitement qu'il existe des systèmes d'axes, soi-disant au repos absolu, et un mode de mesurer le temps, pour lesquels la susdite loi est rigoureusement exacte. On est donc en droit d'exiger qu'on définisse ce système d'axes et ce mode de mesurer le temps. C'est ce que nous essayons de faire dans cette communication.

1° On convient de mesurer les forces, dans chaque système de comparaison, par les accélérations secondes qu'elles impriment aux points. — De cette convention résulte que les points qui se meuvent en ligne droite, d'un mouvement uniforme, sont mis en mouvement par des forces nulles, et réciproquement;

2° On admet qu'il existe au moins une manière de mesurer le temps, et au moins un système S, tels que les corps de l'Univers se meuvent conformément à la loi de la gravitation universelle, à la loi de l'égalité entre l'action et la réaction, et à la loi de l'indépendance des forces;

3° Partant de là, on détermine par le raisonnement comment les astres qui peuplent l'Univers se meuvent par rapport au système S.

On rencontre ainsi dans les calculs des constantes et une variable indépendante t.

Si n est le nombre des constantes, on fait $n + m$ observations à m époques différentes. Ces observations fournissent $n + m$ équations entre les n constantes et les m valeurs de t.

Si les $n + m$ équations sont incompatibles, ou ne fournissent pas pour t m valeurs qui croissent avec l'ordre des observations, les hypothèses faites sont absurdes.

Si les $n + m$ équations fournissent au contraire un système de valeurs convenables pour les inconnues, il est possible que les hypothèses répondent à la réalité.

La possibilité des hypothèses exige en outre qu'on puisse faire *croître t* de manière à faire concorder à chaque instant l'Univers calculé avec l'Univers réel.

Les calculs dont il est question plus haut sont effectués d'avance par les soins des bureaux des longitudes et les résultats en sont consignés dans les éphémérides.

Jusqu'à présent on a réussi à maintenir l'accord entre la théorie et l'observation, grâce à certaines corrections : réfraction, aberration, etc.

La mesure du temps est donc la valeur qu'il convient de donner à t *d'après les éphérémides calculées en se basant sur l'hypothèse de la gravitation universelle.*

Pour connaître cette mesure du temps, on doit avoir recours aux observations enseignées en astronomie sous le nom de détermination de l'heure.

Cette mesure diffère de très peu du temps qui correspond à la révolution apparente du point vernal, ou d'une étoile quelconque.

Connaissant la position de l'Univers théorique par rapport au système S, on peut retrouver à chaque instant la position du système correspondant S de l'espace.

Les mouvements et le repos relatifs au système S sont ceux auxquels ils convient de donner le nom d'absolus pour être d'accord avec ceux qui emploient cette expression.

La question de savoir si les mouvements et le repos absolus, et les autres mouvements et le repos relatifs sont de nature différente, n'est pas du domaine des sciences mathématiques, et la solution qu'on en donne n'a aucune influence sur les calculs.

M. Mansion fait diverses objections à la manière de voir de M. Goedseels. Dans le passé, c'est au moyen d'appareils terrestres, clepsydres, horloges, montres, chronomètres que l'on a mesuré le temps et constaté la presque absolue uniformité du

mouvement diurne de la sphère céleste; cette uniformité, une fois constatée, a servi ensuite à vérifier la régularité du mouvement des chronomètres. Actuellement, si le mouvement diurne de la sphère céleste cessait d'être uniforme, les chronomètres pourraient servir à constater cette non-uniformité.

M. Ch. de la Vallée communique quelques réflexions au sujet de la méthode imaginée par Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet, c'est-à-dire pour trouver la fonction qui prend sur une surface donnée une succession de valeurs connues et qui est harmonique à l'intérieur de la surface. Après avoir rappelé les principales recherches auxquelles ce problème a donné lieu, il applique la méthode de Neumann à la solution du problème correspondant dans le plan, en d'autres termes, à la détermination d'une fonction harmonique de deux variables dans un contour C et prenant sur celui-ci des valeurs données. On trouve dans le *Cours d'analyse* de M. Picard une autre solution du même problème, d'après une modification de la méthode de Neumann, attribuée à Kirchoff; M. de la Vallée ne voit aucun avantage à cette modification qui complique la solution et conduit, pense-t-il, à des séries moins convergentes. Il montre ensuite que la méthode de Neumann, au moins sous la forme où il vient de la présenter, conduit, dès la première opération, à la solution exacte du problème dans le cas du cercle. Cette solution se présente ainsi sous la forme très simple

$$V(a, b) = \frac{1}{\pi}\int_C u\,d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_C u\,d\psi.$$

Dans cette formule, u est une fonction déterminée en chaque point de la circonférence C; V est la fonction harmonique des coordonnées (a, b) d'un point A, fonction qui tend vers u quand A tend vers la circonférence. Les intégrales sont étendues à tous les éléments $d\sigma$ de la circonférence, $d\alpha$ et $d\psi$ sont les angles respectifs sous lesquels l'élément $d\sigma$ est vu du point A et du centre du cercle.

M. de la Vallée rappelle que la solution du problème, dans ce dernier cas, est généralement représentée, sous une forme différente, par une intégrale bien connue sous le nom d'intégrale de Poisson (*). Il montre ensuite que les deux solutions sont identiques et que l'expression de V écrite ci-dessus n'est qu'une interprétation géométrique, digne de remarque, de l'intégrale de Poisson. Cette dernière intégrale et la suivante

$$\frac{1}{\pi}\int_{C} u\,d\alpha,$$

que l'on pourrait appeler *intégrale généralisée de Gauss*, ne diffèrent donc que par une constante, et, par conséquent, la discussion de la première se ramène à celle de la seconde, qui est souvent beaucoup plus facile.

M. de la Vallée montre alors que les résultats précédents sont propres au cas du plan, et il termine en indiquant de quelle manière il convient de les modifier dans le cas de la sphère. Il espère pouvoir présenter bientôt à la section un travail plus complet sur cette question.

M. Mansion fait ensuite la communication suivante *Sur les raisons données par Copernic en faveur du mouvement de la Terre.*

« Depuis Aristote jusqu'à Copernic inclusivement, et même plus tard, les physiciens, dans le sens primitif du mot, c'est-à-dire ceux qui s'occupaient de la partie de la philosophie appelée aujourd'hui cosmologie, regardaient l'univers comme ayant une forme sphérique.

Pour Aristote et la plupart des physiciens de l'antiquité et du moyen âge, la Terre était immobile au centre de cette sphère. Elle était formée de quatre éléments : terre, eau, air, feu, les

(*) Voir, par exemple, E. PICARD, *Cours d'analyse*, t II, p. 16

deux premiers pesants, ou ayant une tendance naturelle vers le centre de notre globe, les deux autres légers, ou ayant une tendance naturelle à s'en éloigner. Les sept planètes des anciens — on appelait ainsi la Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne — et les étoiles fixes étaient d'une autre nature et avaient des mouvements circulaires ou composés de mouvements circulaires. Le mouvement circulaire convenait à l'éther, élément subtil et incorruptible dont ces astres étaient formés ainsi que le Ciel, milieu où ils étaient plongés.

Copernic partageait les idées d'Aristote sur la *composition* de la Terre et du Ciel. Mais pour lui la *disposition* du Cosmos était autre : c'était le Soleil qui occupait le centre du Ciel, et il y était immobile; la sphère des étoiles fixes était aussi immobile, tandis que la Terre avait, à la fois, un mouvement diurne de rotation et un mouvement annuel de révolution autour du Soleil; il lui attribuait de plus un troisième mouvement, pour rendre compte de la précession des équinoxes découverte par Hipparque.

Ptolémée a donné une explication détaillée des phénomènes astronomiques dans l'*Almageste*, en se plaçant au point de vue géocentrique; Copernic, une plus complète, dans son livre *De Revolutionibus*, en partant du point de vue héliocentrique.

L'un et l'autre savaient que les deux explications sont équivalentes et que ni les observations, ni les calculs astronomiques ne peuvent décider si la Terre ou le Soleil occupe le centre du monde, à cause de la grande distance des étoiles. Aussi se sont-ils à peine occupés de cette question de cosmologie qui, au fond, ne rentre pas dans le cadre de leurs ouvrages.

Copernic la traite sommairement dans les chapitres 7 et 8 de son premier livre, en donnant le pour et le contre, puis il conclut : *Pour toutes ces raisons, on voit que le mouvement de la Terre est* PLUS PROBABLE *que son repos, surtout le mouvement de rotation diurne et qui lui convient particulièrement* (*).

(*) « *Vides ergo quod ex his omnibus* PROBABILIOR *sit mobilitas Terrae quam ejus quies, praesertim in quotidiana revolutione, tanquam Terrae maxime propria.* »

Beaucoup de personnes pensent que c'est la crainte de l'opposition des philosophes péripatéticiens et des théologiens qui a empêché Copernic de donner une forme plus accentuée à sa conclusion. Nous croyons qu'il n'en est rien, et pour le montrer, nous allons résumer ici l'argumentation de Copernic, dans les deux chapitres dont nous avons parlé. On verra que les raisons qu'il fait valoir n'ont pas grande force probante.

« *Pourquoi les anciens ont cru la Terre immobile au centre du monde.* — *A*. Raisons en faveur de l'immobilité de la terre : 1° Le centre de la Terre est visiblement le lieu où les corps pesants trouveraient leur repos s'ils pouvaient y parvenir ; la Terre, qui est pesante, y a donc trouvé son repos. 2° Le mouvement circulaire convient aux corps célestes, non à la Terre, dont les éléments ont naturellement le mouvement rectiligne, soit vers le bas, soit vers le haut, suivant qu'ils sont pesants ou légers.

B. Raisons contre le mouvement de la Terre : 3° Si la Terre tournait, son mouvement si rapide en jetterait toutes les parties dans la voûte du Ciel, ce qui est contraire à l'observation. 4° Tous les objets qui sont dans l'air, nuages, etc., auraient un mouvement apparent vers l'occident, ce qui est aussi contraire à l'observation.

Réfutation de ces raisons et leur insuffisance. (Réponse à 3°.) Si la Terre tourne d'un mouvement naturel, comme ce qui est conforme à la nature ne peut être ni violent ni destructeur, ce mouvement ne jettera pas les parties de la Terre dans le Ciel.

Si l'on maintient que le mouvement naturel de la Terre peut être destructeur, on peut soutenir aussi, contre les partisans de Ptolémée, que le mouvement naturel qu'ils attribuent au Ciel est également destructeur et en dispersera les parties. Si l'on soutient qu'il n'est pas destructeur, mais empêche la chute de ces parties sur la Terre, ce mouvement agrandira à l'infini l'orbe du Ciel ; s'il en est ainsi, le Ciel étant infini, doit être immobile, d'après la Philosophie.

Si l'on soutient qu'il ne peut devenir infini parce qu'au delà du Ciel il n'y a rien, alors on admet que c'est le néant qui empêche la dispersion des parties du Ciel, ce qui est étrange.

Enfin, si l'on admet que le Ciel est infini par son côté extérieur, mais limité à sa surface intérieure, tout ce qui existe y est contenu et le Ciel doit être immobile, car le mouvement n'est possible que pour ce qui est fini.

Pourquoi donc ne pas admettre le mouvement de la Terre qui suffit pour expliquer tous les phénomènes?

(Réponse à 4°.) La partie inférieure de l'air et les objets qui y sont situés tournent avec la Terre, soit par similitude de nature, soit par entraînement. La partie supérieure de l'air et les corps qui s'y trouvent, les comètes, par exemple, n'accompagnent pas la Terre dans son mouvement.

(Réponse à 2°.) Le mouvement circulaire est celui qui convient à la Terre; les mouvements rectilignes irréguliers des éléments que l'on observe n'existent jamais que si ces éléments sont séparés de leur tout; le mouvement rectiligne est donc celui qui convient aux parties situées hors de leur place naturelle, mais non ce qui convient au tout. Dans la nature, d'ailleurs, les mouvements coexistent toujours : la distinction aristotélicienne des mouvements en trois classes (rectilignes vers le bas, rectilignes vers le haut, circulaires) est subjective.

(Réponse à 1°.) L'immobilité semble plus noble et plus divine que le changement et l'instabilité, qui, par suite, conviennent mieux à la Terre. Celle-ci n'est d'ailleurs certainement pas le centre du mouvement des planètes qui tantôt s'en rapprochent, tantôt s'en éloignent. Il faut donc plutôt admettre qu'il y a plusieurs centres des mouvements célestes. »

Comme on le voit, les raisons de Copernic sont loin d'avoir une valeur démonstrative, et il a eu raison de conclure modestement que la mobilité de la Terre est plus probable que son repos, rien de plus. Au reste, pour son œuvre astronomique, comme l'a très bien remarqué l'auteur de la préface anonyme du livre des *Révolutions*, il suffisait que Copernic prît pour point de départ la mobilité de la Terre non comme hypothèse physique plus ou moins plausible, mais comme hypothèse mathématique ou postulat.

Deuxième section.

—

M. G. Van der Mensbrugghe communique la note suivante *Sur les pressions exercées par les liquides en mouvement ou en repos :*

Les relations entre la pression hydrostatique et la pression hydrodynamique d'un liquide sont données par une formule due à Daniel Bernoulli, et qui peut s'écrire sous la forme :

$$P = P' + \gamma\left(z - \frac{U^2 - V^2}{2g}\right);$$

P est la pression cherchée en un élément de la paroi, P′ la pression atmosphérique sur la surface libre du liquide, γ le poids spécifique de celui-ci, z la distance verticale du niveau à l'élément pressé, distance qui est positive pour un élément situé au-dessous du niveau, négative pour un point situé au-dessus, U la vitesse du liquide dans la section horizontale passant par l'élément considéré, V la vitesse dans la section du niveau, et g l'intensité de la pesanteur.

En 1889, j'ai publié (*) un procédé élémentaire pour montrer les variations de la pression hydrodynamique, tandis que, tout récemment (**), j'ai fait voir comment on peut réaliser avec facilité les effets produits à l'état statique par les valeurs négatives de z. Je crois faire chose utile en décrivant quelques expériences très simples sur les pressions exercées par les liquides, soit à l'état de repos, soit à l'état de mouvement.

Première expérience. Soit un tube en caoutchouc fort mince, ou bien un tube en soie cirée, dont les bords sont collés à la colle forte et puis parfaitement séchés : après avoir bouché parfaitement l'une des ouvertures, on remplit complètement le tube

---

(*) *Contribution à la théorie du siphon* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 3e série, t. XVII.)

(**) *Sur la pression hydrostatique négative.* (IBID., t. XXV, pp. 365 et 433)

d'eau, on ferme l'autre bout, on courbe le tube en forme de siphon ordinaire (fig. 1), et l'on plonge l'extrémité de la courte branche dans un vase contenant aussi de l'eau : aussi longtemps que l'extrémité plongée demeure parfaitement fermée, on ne verra se produire aucun changement dans les parois du tube flexible; mais à l'instant même où cette extrémité est ouverte, toute la portion du tube qui s'élève au-dessus du niveau s'aplatira (fig. 2), pendant qu'une notable quantité de liquide descendra dans le vase. T est la section d'un gros tube en verre servant de support au siphon.

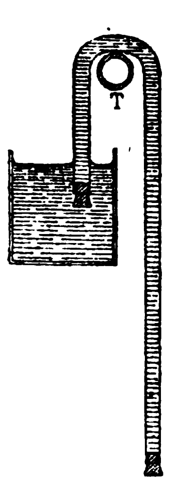


Fig. 1.

Le phénomène est facile à expliquer : dans le cas actuel, les vitesses U et V sont nulles, et pour tous les éléments de la paroi qui se trouvent au-dessus du niveau dans le vase, z est négatif; on a donc, pour chacun de ces éléments,

$$P = P' - \gamma z,$$

c'est-à-dire que la pression intérieure P y est partout inférieure à la pression extérieure P', et cela d'autant plus que la distance verticale de ces éléments au niveau est plus grande. Au contraire, pour les éléments situés plus bas que le niveau, on a

$$P = P' + \gamma z,$$

c'est-à-dire que la pression intérieure est plus grande que P'; aussi les portions du tube correspondantes sont-elles si bien remplies d'eau que leurs sections droites demeurent sensiblement circulaires.

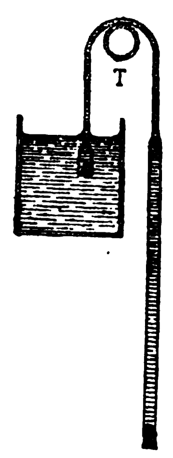


Fig. 2.

Deuxième expérience. On remplit d'abord complètement d'eau un siphon en verre, on le bouche ensuite aux deux extrémités;

cela fait, on plonge l'extrémité de la longue branche dans l'eau, et celle de la courte branche dans le mercure (fig. 3); débouchant à la fois les deux orifices, on voit le mercure s'élever au-dessus du niveau N à une hauteur h égale à fort peu près à $\frac{H}{13.6}$, H étant la distance verticale du sommet de la colonne de mercure au niveau N′ de l'eau du vase.

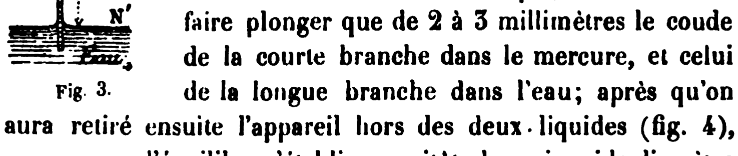


Fig. 3.

Si l'on a eu soin de replier à angle droit chacune des deux branches du siphon sur une longueur de 4 à 5 centimètres, on peut retirer l'une de l'eau, l'autre du mercure, sans que l'équilibre soit définitivement rompu; il suffit de ne faire plonger que de 2 à 3 millimètres le coude de la courte branche dans le mercure, et celui de la longue branche dans l'eau; après qu'on aura retiré ensuite l'appareil hors des deux liquides (fig. 4), l'équilibre s'établira aussitôt, du moins si le diamètre intérieur du siphon est de 4 à 5 millimètres; cet équilibre sera stable, car si le mercure montait davantage, la succion de l'eau serait trop faible pour contre-balancer le poids de la colonne de mercure; un déplacement contraire rendrait cette succion trop grande, et le mercure reprendrait sa position d'équilibre.

Fig. 4.

Dans les expériences précédentes intervient partout la pression atmosphérique P′, et même d'une façon prédominante; on peut se demander s'il n'y aurait pas un moyen facile d'exclure cette pression de l'air, tout en laissant subsister les pressions négatives. On connaît déjà plusieurs faits qui montrent que des quantités relativement notables de liquides peuvent être maintenues en équilibre sans l'intervention de la pression de l'air : on a observé, par exemple, que le mercure très pur demeure parfois suspendu dans un tube à une hauteur de beaucoup supérieure à la hauteur normale de 76 centimètres; on connaît aussi la jolie expérience de

F. Duprez (*) consistant à maintenir en équilibre, *dans le vide*, une colonne d'eau contenue dans un tube fermé en haut et ouvert en bas.

Guidé par cette considération, j'ai disposé convenablement l'appareil représenté (fig. 4) sur la platine de la machine pneumatique, et j'ai fait le vide autant que possible; l'équilibre de la double colonne de mercure et d'eau s'est parfaitement maintenu; j'en ai conclu que si la machine avait permis de faire un vide absolu, cet équilibre n'aurait pas été rompu. Or, en l'absence de la pression atmosphérique, tous les points de la paroi interne qui sont en dehors des portions recourbées et supposées horizontales, sont soumis à des pressions négatives, absolument comme dans l'expérience de F. Duprez.

Jusqu'à présent, j'ai supposé le liquide à l'état de repos; je vais passer au cas où il est en mouvement.

Pour plus de simplicité, je supposerai la vitesse V du liquide dans la section du niveau, assez faible par rapport à la vitesse U dans la section passant par l'élément considéré, pour que V soit négligeable; dès lors la formule devient

$$P = P' + \gamma\left(z - \frac{U^2}{2g}\right).$$

Soient o la section d'écoulement du liquide, et s celle qui passe par l'élément considéré; si v est la vitesse à l'orifice, on pourra écrire sensiblement $ov = s.U$, d'où $U = v\frac{o}{s}$, et conséquemment

$$P = P' + \gamma\left(z - \frac{o^2}{s^2}\cdot\frac{v^2}{2g}\right).$$

Troisième expérience. Reprenons notre tube en soie cirée, et introduisons, à l'un des bouts, un anneau en fil de fer fin ou de cuivre, destiné à maintenir constant le diamètre de la section

(*) *Mémoire sur un cas particulier de l'équilibre des liquides* (NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DE BELGIQUE, t. XXVI, 1854).

à ce même bout : bouchons ensuite ce bout, remplissons entièrement le tube d'eau; fermons l'autre bout, et après avoir courbé le tube en forme de siphon, l'anneau en fil de fer étant au bas de la longue branche (fig. 5), accrochons-le à un support convenable projeté en T; nous n'aurons plus qu'à plonger l'extrémité de la courte branche dans l'eau contenue dans un large vase, puis à déboucher le tube aux deux extrémités, pour voir le tube s'aplatir dans toute son étendue, sauf vers le bas, où l'anneau métallique empêche la diminution de section (fig. 6).

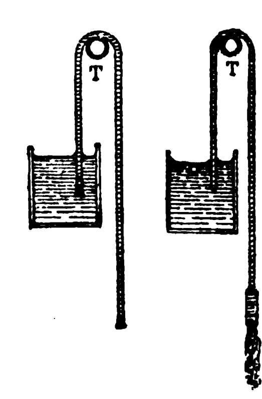


Fig. 5. Fig. 6.

Pour expliquer cet effet, remarquons qu'au moment où l'on débouche les deux orifices du tube, nous avons, pour toute la longueur du tube, $o = s$; pour ce même moment, nous pouvons remplacer $\frac{v^2}{2g}$ par h, c'est-à-dire par la distance verticale du niveau à l'orifice inférieur du siphon, et écrire simplement :

$$P = P' + \gamma(z - h).$$

Or on a $z < h$ en tous les points inférieurs au niveau du vase; pour les points supérieurs à ce niveau, $P = P' - \gamma(z + h)$; donc la pression intérieure P est partout moindre que la pression extérieure P' : voilà pourquoi le tube s'aplatit aussitôt partout où la flexibilité de la matière le permet.

Il est aisé de rendre à volonté la pression hydrodynamique supérieure, égale ou inférieure à la pression de l'air atmosphérique : il suffit pour cela d'employer un siphon de verre ayant partout environ 1 centimètre de diamètre intérieur, percé latéralement d'une ouverture a de 1 millimètre d'ouverture à 7 ou 8 centimètres de l'orifice d'écoulement (fig. 7), et terminé, à la longue branche, par un tube en caoutchouc de 2 centimètres environ de longueur et de même section intérieure que le siphon;

dès que l'appareil est amorcé, sous une charge de 30 à 40 centimètres, par exemple, on constate l'existence d'un filet gazeux entraîné par le liquide. Mais si l'on comprime subitement l'orifice terminal en caoutchouc, la section o diminue, le terme $\frac{o^2}{s^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ diminue plus rapidement encore ; ainsi le binome $z - \frac{o^2}{s^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ peut devenir nul, et alors par l'ouverture latérale il ne passe ni eau ni air ; si ce binome devient positif, on voit sortir par l'ouverture un jet liquide d'autant plus rapide que z l'emporte davantage sur $\frac{o^2}{s^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$.

Fig. 7.

Si l'on opère avec un siphon dont la longue branche présente un étranglement très marqué, c'est la section s qui peut devenir très petite relativement à la section o d'écoulement; dès lors le terme $\frac{o^2}{s^2} \cdot \frac{v^2}{2g}$ l'emporte notablement sur z, tandis que la pression intérieure P est de beaucoup inférieure à la pression extérieure P' ; l'air se précipite alors avec force dans le siphon. On reconnaît aisément le principe de la trompe.

Pour terminer cette petite communication, je dirai que l'on peut constater bien simplement comme il suit les variations de la pression hydrostatique et de la pression hydrodynamique : à l'aide d'un petit tuyau en caoutchouc, on relie solidement le bec d'un grand entonnoir à un long tube en verre présentant une ouverture latérale a (fig. 8). On commence par boucher celle-ci et l'orifice libre du tube de verre, et l'on dispose l'entonnoir sur un support convenable ; on le remplit alors complètement d'eau ; toutes les pressions exercées ainsi sur



Fig. 8.

la paroi intérieure obéissent aux lois de l'hydrostatique. Mais aussitôt qu'on ouvre l'orifice inférieur du tube, les pressions supportées par la paroi sont soumises aux lois de Bernoulli. Si l'on débouche l'ouverture latérale, l'air extérieur y pénètre d'autant plus rapidement que la vitesse du liquide est plus grande.

Si l'on remplaçait le tube de verre par un long tube en soie cirée, celui-ci s'aplatirait dès que l'orifice d'écoulement serait débouché.

M. Louis Henry a continué les recherches qu'il a entreprises sur les composés *monocarbonés*, ces microbes de la chimie organique.

Il rend compte de l'action des bases ammoniacales, *amidées* $H_2N - X$ et *imidées* $HN - X_2$ de la série aliphatique, sur l'aldéhyde méthylique $H_2C = O$ ou l'oxyde de méthylène, le *méthanal* dans la nouvelle nomenclature.

Les bases nitrilées NX_3 (X représente un groupement hydrocarboné CH_3, C_2H_5, etc.) sont inertes sur l'oxyde de méthylène; les bases *amidées* H_2NX et *imidées* HNX_2, qui renferment encore de l'hydrogène ammoniacal, réagissent au contraire énergiquement par celui-ci sur ce composé. Il se sépare de l'eau et le reste $= NX$ où $-(NX_2)_2$ remplace l'oxygène vis-à-vis du méthylène $> CH_2$.

M. Louis Henry trouve les types de cette réaction dans l'action de la méthylamine $H_3C - NH_2$ et de la diméthylamine $(H_3C)_2NH$ sur $CH_2 = O$.

La *méthylamine* $H_3C - NH$ (solution aqueuse de 33 °/₀) réagit intensément sur l'aldéhyde méthylique (solution aqueuse de 40 °/₀); on emploie de ces corps des quantités équimoléculaires. La KOH caustique solide introduite dans le mélange refroidi des deux solutions en sépare le produit sous forme d'une couche huileuse surnageante.

$H_3C - N = CH_2$, *méthyl-méthylène-amine*. Liquide incolore, d'une faible odeur de marée, soluble dans l'eau; $D = 0{,}9215$ à 18° 7; éb. 166° sous la pression de 758^{mm}; congelable et fusible à − 27°.

La *diméthylamine* $(H_3C)_2NH$ (solution aqueuse de 33 °/₀), réagit aussi énergiquement sur CH_2-O aqueuse (solution de 40 °/₀). Les deux solutions se mélangent.

La réaction totale s'accomplit en deux temps : *a*) une seule molécule de diméthylamine; addition.

$$H_2C=O + HN-(CH_3)_2 = H_2C<^{OH}_{N-(CH_3)_2}.$$

K_2CO_3 fait sortir ce produit de sa solution aqueuse sous forme d'une couche liquide surnageante.

Liquide incolore, très mobile, d'une odeur extraordinairement piquante et pénétrante, non distillable comme tel; le sodium en chasse de l'hydrogène, le produit sodé répond à la formule

$$H_2C<^{ONa}_{N(CH_3)_2} \quad (Na = 24,72\ °/_0;\ trouvé\ 25,4).$$

b) Deux molécules de diméthylamine avec une seule de $CH_2=O$ ou une molécule de diméthylamine sur le produit précédent donne la *tétra-méthyl-méthylène-diamine* : $H_2C<^{N(CH_3)_2}_{N(CH_3)_2}$.

Liquide incolore, très mobile, d'une odeur très forte, rappelant tout à la fois celle de l'ammoniaque et de l'aldéhyde méthylique, soluble dans l'eau, d'une densité égale à 18°7; bouillant à 83°-85°; incongelable; le sodium y conserve son brillant.

On remarquera la différence énorme de volatilité entre ces deux composés

$$H_2C=N-CH_3 \qquad \text{Éb. } 166°$$

$$H_2C<^{N-(CH_3)_2}_{N-(CH_3)_2} \qquad \text{Éb. } 83°\text{-}85°.$$

C'est en apparence l'inverse qui devrait avoir lieu; la grande volatilité du dérivé tétraméthylique est due au voisinage des deux atomes d'azote fixés sur le même atome de carbone. M. L. Henry a signalé à différentes reprises l'influence volatilisante qui résulte de l'accumulation des radicaux négatifs en un point des molécules carbonées.

M. L. Henry fait la même remarque au sujet de la méthylène-

méthylamine et de son dérivé oxygéné l'éther cyano-méthylique :

$H_2C=N-CH_3$	Éb. 166°
$OC=N-CH_3$	Éb. 43°-45°.

Ici cette influence volatilisante va jusqu'au renversement des relations normales de volatilité que l'on constate entre un composé hydrogéné et le composé oxygéné correspondant :

$H_3C-O-CH_3$	Éb. - 23°
$HOC-O-CH_3$	— + 32°.

M. L. Henry signale encore les composés suivants :
Série mono-azotée : $H_2C=N-C_nH_{2n+1}$

$H_2C=N-C_2H_5$	Liquide	éb. 207°-208°
$H_2C=N-C_3H_7$ normale	—	— 248°
$H_2C=N-N<^{C_6H_5(*)}_{CH_3}$	—	— 215°-216°.

Série bi-azotée : $H_2C<^{N-(C_nH_{2n+1})_2}_{N-(C_nH_{2n+1})_2}$.

$H_2C<^{N(C_2H_5)_2}_{N(C_2H_5)_2}$	Éb. 168°
$H_2C<^{N(C_3H_7)_2}_{N(C_3H_7)_2}$	Éb. 225°-230°.

L'action de la pipéridine $HN=C_5H_{10}$ sur $CH_2=O$ aq. est, selon M. L. Henry, particulièrement intéressante et instructive.

Avec une molécule seulement de pipéridine, $CH_2=O$ aq. on obtient $H_2C<^{OH}_{N-C_5H_{10}}$, liquide incolore, limpide, insoluble dans l'eau, d'une odeur très piquante.

Chauffé avec une nouvelle molécule de $HN=C_5H_{10}$, ce produit réagit énergiquement ; il se trouble par suite d'un départ d'eau,

$$H_2C<^{OH}_{N=C_5H_{10}} + HN=C_5H_{10} = H_2C<^{N(C_5H_{10})}_{N(C_5H_{10})},$$

(*) Produit de l'action de la méthyl-phényl-hydrazyne $^{C_6H_5}_{CH_3}>N-NH_2$ sur $CH_2=O$ aq.

et il se forme de la méthylène-diamylène-diamine $H_2C<^{N=C_5H_{10}}_{N=C_5H_{10}}$. Éb. 240°.

Avec la dibenzylamine $HN-(CH_2-C_6H_5)_2$, le composé $H_2C<^{OH}_{N-C_5H_{10}}$ fournit à la suite d'une réaction fort vive *le mixte*

$$H_2C<^{N-(CH_2-C_6H_5)_2}_{N-C_5H_{10}},$$

corps solide, insoluble dans l'eau, soluble dans l'alcool méthylique d'où il cristallise en prismes fondant à 101°-102°.

Chauffés avec les acides minéraux étendus, tous ces produits se dédoublent en reproduisant leurs générateurs. Tous, même ceux qui sont solubles dans l'eau, comme les dérivés méthyliques, sont insolubles dans la solution des alcalis libres et carbonatés.

On sait avec quelle force NH_3 réagit sur $H_2C=O$ aq. L'introduction de KOH solide dans la liqueur en sépare la méthylène-amine $H_2C<^{N=CH_2}_{N=CH_2}$ sous forme d'un précipité blanc qui cristallise très bien de l'alcool méthylique.

La facilité avec laquelle les bases ammoniacales hydrogénées réagissent sur $H_2C=O$ nous explique l'impossibilité d'obtenir les dérivés méthyléniques $H_2C=NH$ et $H_2C<^{NH_2}_{NH_2}$, lesquels passent de suite à la méthylène-amine :

$$\begin{matrix}H_2C=NH\\H_2C=NH\end{matrix}+O=CH_2=\begin{matrix}H_2C=N\\H_2C=N\end{matrix}>CH_2+H_2O,$$

$$H_2C<^{NH_2}_{NH_2}+\begin{matrix}O=CH_2\\O=CH_2\end{matrix}=H_2C<^{N=CH_2}_{N=CH_2},$$

laquelle est l'aboutissant ultime de l'action de NH_3 sur le méthanal.

La méthylène-amine répond à la formule moléculaire

$$\left(H_2C<^{N=CH_2}_{N=CH_2}\right)_2,$$

formule qui correspond à son composé chlorhydrique et que confirme la méthode cryoscopique.

M. L. Henry termine en faisant remarquer qu'un chimiste français a publié en juillet dernier (*Bulletin de la Société chimique de Paris*) une notice préliminaire sur les composés qu'il vient

de faire connaître. Selon M. A. Trillat, ces produits se présenteraient « sous la forme de poudre amorphe ou de cristaux plus » ou moins bien définis et dont le point de fusion n'est géné» ralement pas très net. » M. L. Henry ne prévoit pas quelles peuvent être les conditions dans lesquelles a opéré M. A. Trillat pour arriver à des résultats aussi complètement en discordance avec les siens.

M. F. Leconte parle des méthodes de mesure du rendement industriel des dynamos au moyen des diagrammes des machines à vapeur.

Troisième section.

—

La section se réunit dans le *Musée géologique des bassins houillers belges*, que le R. P. Schmitz, S. J., a organisé au collège Notre-Dame de la Paix.

M. de la Vallée Poussin expose quelques-unes des conclusions qui résultent des recherches que M. l'abbé Renard et lui ont faites sur les *porphyroïdes* de Rognon-Fauquez, à l'occasion de la nouvelle carte géologique de la Belgique. Il désigne par le terme de porphyroïde, des roches offrant en même temps la texture des porphyres et une texture feuilletée. Dumont les nommait tour à tour chlorophyre schistoïde et albite phylladifère et y voyait des filons d'intrusion de date postérieure aux terrains anciens adjacents.

Suivant M. de la Vallée, d'après des recherches lithologiques récentes, on y peut distinguer :

1° Des roches éruptives à rapprocher à l'origine des porphyrites augitiques quartzifères, où se sont développés beaucoup de minéraux secondaires, en particulier la chlorite et la séricite, et qui ont été laminées et feuilletées par les mêmes actions orogéniques qui ont feuilleté les couches siluriennes après leur dépôt. Il fait voir que l'observation au microscope confirme, à cet égard, l'observation faite sur le terrain;

2° Des couches fragmentaires ou clastiques, où se retrouvent les mêmes éléments que dans la série précédente. Mais la plupart d'entre eux sont hors de leur lieu d'origine ; beaucoup sont brisés, échancrés. Ils forment ordinairement des schistes gris verdâtre à texture grenue, très distincte à la cassure de celle des schistes siluriens adjacents. Le microscope y fait retrouver, avec les plagioclases des porphyrites, des fragments de roche granulitique ou microlitique de textures assez différentes. Ces mêmes couches alternent parfois régulièrement avec les couches siluriennes ; enfin, M. de la Vallée y a rencontré des fossiles dans plusieurs gisements. Elles sont donc elles-mêmes de date silurienne ; et comme elles représentent évidemment des tufs, des fragments, des détritus étalés sur le fond marin et se rattachant aux porphyroïdes qu'elles surmontent, elles font reculer l'âge de ces dernières à la période silurienne, contrairement à l'opinion de Dumont.

M. X. Stainier entretient la section d'un singulier accident, un accident minéralogique dont il a failli être la victime. Un morceau de pyrite lui a éclaté entre les mains, par l'effet d'une simple percussion.

Le R. P. H. Bolsius, S. J., professeur au collège d'Oudenbosch (Pays-Bas), fait une communication préliminaire sur certains détails de l'anatomie d'*Astacobdella branchialis*, dont il vient d'acquérir un assez grand nombre d'exemplaires, il y a quelques jours seulement. Cette petite Annélide, qui vit sur les branchies de l'Écrevisse, présente, relativement aux autres espèces examinées par l'auteur, un cas remarquable de *transposition des orifices sexuels* qui cependant a déjà été signalé par ses devanciers.

La figure ci-après nous permet d'être court sans nuire à la clarté (*).

(*) La portion intéressant les organes sexuels est schématisée d'après la reconstruction de trente-deux coupes microtomiques de l'épaisseur de 21 ½ μ, pratiquées transversalement et comprenant ainsi 0,6 millimètres de longueur.

Qu'il suffise d'en donner une *légende* un peu détaillée.

I, II, III, etc., indiquent les somites, à compter depuis la tête. Puisque celle-ci ne révèle pas immédiatement sa composition, nous la laissons provisoirement de côté.

Dans le somite V, le pointillé indique les nombreux spermatozoïdes qui abondent dans toute la cavité.

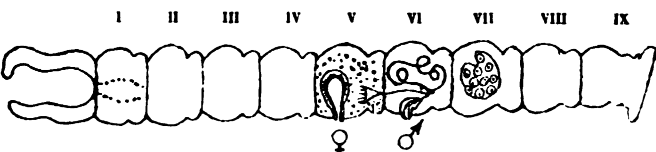


Figure schématique, grossissement ± 25.

Il existe, dans ce même somite V, deux entonnoirs ciliés, placés symétriquement à gauche et à droite; celui de droite est seul figuré (*).

Le canal qui fait suite à l'entonnoir passe à travers le dissépiment et se rend dans le somite VI. Ici les deux canaux des deux entonnoirs se réunissent, sur la ligne médiane, à un spermiducte qui, après plusieurs circonvolutions, se porte vers la face ventrale et s'ouvre à l'extérieur, comme le montre la figure.

(*) En examinant cet entonnoir plus attentivement, nous avons été surpris de sa ressemblance avec la figure 83 (page 188) du manuel de GEGENBAUR (*Grundriss d. vergl. Anat.*, IIe édit., Leipzig, 1878). L'objet représenté est appelé « *l'orifice interne d'un organe segmentaire de* Branchiobdella ». Puisque *Branchiobdella* est le synonyme de *Astacobdella* (cf. MOQUIN-TANDON. IIe édit., p. 298), il est permis de croire que Gegenbaur et nous, nous avons examiné le même animal.

Malheureusement la figure 83 de Gegenbaur ne porte aucune indication de grossissement, ni de position dans tel ou tel somite de l'animal : la comparaison et la vérification en deviennent très difficiles.

Remarquons cependant ceci : 1° avec un grossissement DD × 1 de Zeiss (environ 420 linéaire) nous obtenons, à la hauteur de la platine, un dessin de même dimension que celui de Gegenbaur; 2° la forme et les contours sont les mêmes; 3° le nombre des bourrelets de l'embouchure ne diffère guère du nombre de cellules que nous lui trouvons; 4° la différenciation du tube en couche hyaline externe et couche granuleuse interne, dans la figure 83, est retrouvée par nous dans la *propria* hyaline qui environne le tube formé par des cellules épithéliales; 5° les cils vibratiles ne manquent pas non plus aux endroits indiqués dans la figure 83. En un mot, la figure que n[illegible] omettant les limites entre les cellules, ressemble, à s'y méprendre, à l[illegible] baur. Comme il ressort de notre figure ci-dessus, nous trouvons cett[illegible] somite V à compter depuis la tête.

Si Gegenbaur a trouvé son objet dans le même endroit, ce don[illegible] douter, il a pris l'entonnoir du *spermiducte* pour l'entonnoir d'un c[illegible]

Dans le même somite V se trouve un autre organe de forme utriculaire. Cette formation, parfaitement close à l'intérieur et entourée d'une assez forte tunique, s'ouvre à l'extérieur à travers la paroi ventrale de ce même somite.

On ne pouvait reconnaître dans cet organe autre chose que l'oviducte, aussi longtemps que l'animal, excepté les deux orifices de l'appareil digestif, ne présenta d'autres orifices que les deux indiqués sur les somites V et VI.

Ajoutons encore quelques petites remarques sur des points importants de l'anatomie de ces deux organes.

a) Le spermiducte, à un certain point de son parcours, prend assez brusquement un aspect différent de celui qu'il avait depuis le point d'intersection des canaux venant des entonnoirs. Ce changement se fait à peu près à la moitié de la longueur totale.

b) Le spermiducte est *unique*; par conséquent, pour arriver à la paroi ventrale, il passe d'*un côté* seulement du cordon ganglionnaire.

c) La cavité du somite V, que nous avons indiquée comme portant l'orifice femelle, n'est pas en relation directe avec ce que nous disons être l'*ovaire*. Celui-ci se trouve dans le somite VII. C'est une agglomération de cellules ayant entièrement le facies de l'ovaire des autres Annélides. On y remarque facilement des cellules de diverses grandeurs et dont plusieurs montrent des noyaux en cinèse.

Les œufs sortent par des orifices que nos préparations actuelles ne montrent pas. L'examen d'autres individus coupés plus finement permettra de les montrer plus tard.

Il ne sera pas superflu d'indiquer encore quelques détails de l'*Astacobdella branchialis* qui s'éloignent de ce qu'on observe dans les Hirudinées (*).

(*) Gegenbaur, dans son manuel cité plus haut, dit déjà que la *Branchiobdella* (*Astacobdella*) ne devrait pas compter parmi les Hirudinées. Dans la sixième note de la page 134 (*op. cit*.), il dit : « Die den Hirudineen beigezählte Gattung *Branchiobdella* » möchte ich den Anneliden, und zwar den Scoleinen zurechnen. Die Organisation dieses

1° Les cloisons entre les somites sont complètes, comme dans les Lombrics, les Enchytrées, etc.;

2° L'intestin (que nous avons omis dans la figure, sauf la partie antérieure, indiquée en pointillé) est suspendu uniquement par les cloisons ou dissépiments. Dans le trajet de chaque somite, il flotte pour ainsi dire dans la cavité somatique;

3° Les spermatozoïdes, loin d'être contenus dans une série de testicules, sont semés librement dans le somite V, où ils entourent l'intestin et l'organe femelle;

4° Des organes segmentaires ont été vus dans les somites II et VIII; il n'est pas encore établi si celui du somite II ne se prolonge pas jusque dans le somite III pour y déboucher à l'extérieur; de même pour les somites VIII et IX;

5° L'animal complet ne possédant que neuf somites bien évidents à la suite de la tête, les orifices sexuels sont rejetés dans la seconde moitié du corps, comme le schéma le montre clairement.

Par ces caractères, ainsi que par la musculature du corps qui est des plus simples, l'*Astacobdella branchialis* se différencie fortement des Hirudinides, des Néphélides, des Glossiphonides et de bien d'autres encore (*).

» Wurmes enthält ausser den Saugnäpfen und Kiefern nichts Egelartiges, und jene » Theile sind doch wohl durch Anpassung an die parasitische Lebensweise entstandene » Bildungen. »

Puisque nous n'avons pas encore étudié à fond toute l'anatomie de l'*Astacobdella*, nous ne sommes pas à même de former un jugement définitif sur cette question. Plusieurs points néanmoins de l'anatomie de *Branchiobdella*, indiqués par Gegenbaur dans son ouvrage cité, sont en opposition avec ce que nous avons déjà constaté par un examen provisoire.

Pour ne citer qu'un exemple, disons que le conduit sexuel n'est pas constitué comme le dit l'auteur à la page 202. D'après lui, la *Branchiobdella* se rattacherait au type des Annélides, chez lesquelles il existerait un *conduit double* (Doppelbröhre) dont les deux parties seraient emboîtées l'une dans l'autre. Le *conduit interne* serait la continuation du spermiducte, tandis que le *conduit externe* fonctionnerait comme oviducte. « An diesen Typus », dit Gegenbaur, « schliesst sich auch *Branchiobdella* an. » Les faits que nous avons sous les yeux disent le contraire.

(*) Des préparations microtomiques de quelques Hirudinées mentionnées ici, et des préparations d'Annélides permettent aux membres de la section de constater que la musculature et le cloisonnement, ainsi que l'arrangement de l'intestin, se rapprochent beaucoup, dans l'*Astacobdella branchialis*, de ce qu'on voit dans les Annélides.

Mais la ventouse postérieure, le rectum rétréci et pourvu d'un sphincter très développé, l'orifice anal placé dorsalement en avant de la ventouse, tout cela rappelle le type des Hirudinées.

Sur la tête on n'a jamais pu découvrir d'yeux; Moquin-Tandon mentionne déjà l'absence d'organes visuels.

Nous poursuivrons nos recherches sur cette Hirudinée problématique que Moquin-Tendon appelle le plus petit représentant de la famille entière. (Moquin-Tandon, II[e] édit., p. 298.)

Nous n'ignorons pas que tout n'est pas expliqué et démontré par ce qui précède; aussi nous ne le donnons que comme une communication préliminaire (*).

Le R. P. H. Bolsius présente ensuite à la section une collection d'Hirudinées. Elle contient une trentaine d'espèces pour la plupart exotiques. Il s'y trouve des représentants de la faune aquatique de l'Hindoustan, du Sahara, du Mexique, du Congo, du Sénégal, de la Syrie, du Chili, des Antilles, de l'Algérie, de la Nouvelle-Calédonie, de Madagascar, etc.

Pour les Hirudinées terrestres, il n'y a pour le moment que la seule *Xerobdella Lecomtei.*

Toutes ont été déterminées par le D[r] Raph. Blanchard, professeur agrégé à la Faculté de médecine à Paris; et c'est lui qui nous les a remises il y a quelques jours. Qu'il nous soit permis de lui en renouveler nos sincères remerciements.

M. Raph. Blanchard se propose d'écrire une monographie de la familles des Hirudinées. Ce sera un travail de longue haleine, surtout que l'étendue de cette famille va bien au delà des prévisions! De tous les pays, il lui arrive des membres peu ou point connus de cette grande famille.

(*) Pendant l'impression même de cette notice, les recherches ultérieures ont révélé des détails modifiant les données précédentes. 1° Par des coupes *très fines* dans le somite VII s'est dévoilé un orifice large de $0^{mm},007$ chez un individu large de $0^{mm},930$. C'est le véritable orifice de l'oviducte (non marqué sur la figure); 2° La cavité du somite V est le *receptaculum seminis*; 3° Les organes segmentaires, pourvus d'un entonnoir extrêmement petit, débouchent sur la face dorsale; 4° La partie appelée *céphalique* est probablement somatique contenant l'estomac.

Nous sommes aujourd'hui complètement de l'avis de Gegenbaur : l'*Astacobdella* n'est pas une Hirudinée.

Pour faciliter un peu cette lourde besogne, nous tâcherons de réunir, sur les points caractéristiques de diverses espèces, des données anatomiques, que M. Raph. Blanchard a eu l'amabilité de nous demander afin de les insérer dans sa monographie.

La difficulté de la tâche que veut entreprendre M. Blanchard, ressort mieux encore, croyons-nous, du temps que le savant parisien pense devoir y mettre. Pour autant qu'il peut le prévoir dès à présent, il ne faudra pas moins de cinq ou six ans, pour mener à bonne fin le travail proposé, qui cependant l'occupe déjà depuis plusieurs années.

Comme nous n'avons pas encore eu l'occasion de faire des recherches durant le peu de jours que nous sommes en possession de la belle collection qui est sous les yeux des membres de la section, cette communication se borne forcément à faire remarquer que le champ de nos études sur la structure des parties intéressantes des Hirudinées s'agrandit considérablement par cette nouvelle acquisition.

Nous espérons qu'au fur et à mesure que ces recherches avanceront, nous pourrons en communiquer les résultats dans les réunions futures de la Société scientifique. Seulement, nous regrettons vivement que les Hirudinées dont nous avons avons fait l'acquisition aient été généralement conservées dans l'alcool, sans autre fixation préalable. Nous serons par là réduits, pour plusieurs espèces, à étudier uniquement la structure histologique, et la stucture cytologique devra être recherchée sur d'autres individus préparés spécialement en vue de cet examen plus délicat.

Enfin, le R. P. Schmitz, S. J. fait connaître le but qu'il poursuit dans ses études géologiques; il expose le plan du musée où il a reçu la troisième section et en montre les diverses parties.

Quatrième section.

La réunion de la section a lieu à la Policlinique de Namur, dont le président, M. Ranwez, souhaite la bienvenue à ses confrères venus à Namur à l'occasion de la session de la Société scientifique. Un assez grand nombre de médecins assistent à la réunion. Citons, outre M. Ranwez, MM. Arnould, Ghesquière, Swolfs, Vassal, Renard, Delvigne, Lefebure, etc.

En s'asseyant au fauteuil de la présidence, M. Cuylits remercie la section de médecine de l'avoir appelé à diriger ses travaux pendant les deux années qui vont s'écouler et formule le vœu, admis à la fin de la séance, sous forme de proposition, de voir ses collègues s'occuper non seulement de sujets relatifs à la science médicale, mais aussi de questions d'une autre nature, ayant une évidente connexité avec la médecine. Ces questions sont traitées dans les journaux politiques le plus souvent avec beaucoup d'incompétence.

Une autre proposition, émise par M. Proost, et tendant à n'accorder qu'un temps limité à la communication des travaux et aux discussions qu'ils font naître, a aussi été adoptée, avec la réserve de laisser le bureau libre de modifier la distribution du temps d'après le nombre et l'importance des sujets à traiter.

L'ordre du jour appelle d'abord la lecture du procès-verbal de la réunion précédente. Il est adopté sans modifications.

M. Vanderlinden entretient l'assemblée *De l'action aseptique et antiseptique de la formaline,* produit nouveau qu'il a expérimenté de concert avec M. De Buck. Voici les conclusions qu'il se croit autorisé à formuler ensuite de ses expériences :

1° La formaline en solution aqueuse à $^1/_2$ °/₀ répond bien à certains desiderata de la chirurgie moderne comme liquide à la fois aseptique et antiseptique (il n'est pas improbable que cette concentration puisse encore être abaissée) ;

2° A ce degré de concentration, la formaline ne peut exercer sur nos tissus qu'une action fort peu nocive;

3° Son absorption n'est pas à craindre, car sa toxicité est faible;

4° Pour autant qu'elle est toxique, son action se porte surtout sur le système nerveux central et notamment sur la moelle.

Mentionnons, avec l'auteur, que la formaline est une solution aqueuse d'un corps gazeux, le formaldéhyde au titre de 40 °/₀ en poids.

M. Vanderlinden remet ensuite une note *Sur l'arthrodèse.* Il rapporte le cas d'un malade qui dut subir cette opération pour remédier à une infirmité résultant d'un pied bot paralytique et que les appareils les plus divers avaient été impuissants à corriger.

L'opéré avait 14 ans et son affection, consécutive à une poliomyélite aiguë, datait de l'âge de 2 ans. La jambe était atrophiée et l'aponévrose plantaire rétractée, tout en forçant la courbure du dos du pied, faisait saillir la tête de l'astragale. Si l'enfant soutenu par une béquille voulait mouvoir la jambe, la pointe du pied tombait en avant et son bord externe venait raser le sol. L'étude attentive de ce cas porte nos honorables confrères à recourir à l'arthrodèse comme seul moyen de fixer l'articulation tibio-tarsienne ballante, en y joignant la section du tendon d'Achille et de l'aponévrose plantaire combinée avec une résection partielle de l'astragale pour donner au pied la position utile à la marche. La suture des parties molles et un appareil plâtré complètent l'intervention opératoire.

Le résultat obtenu fut excellent : six mois après l'opération, l'enfant, grâce à la réduction du pied solidement ankylosé, pouvait se livrer à tous les exercices.

L'arthrodèse constitue une opération d'exception et ne doit être mise en œuvre que dans le cas d'un pied ballant, lorsque la paralysie complète rend illusoire l'emploi de tout autre moyen. Ce que nous disons du pied est vrai aussi quand il s'agit du genou ou des membres supérieurs.

Cette intéressante communication est suivie de l'exposition d'*Un cas d'irresponsabilité criminelle*, par M. Cuylits. Notre honorable président relate l'histoire d'un jeune homme, de conduite exemplaire jusque-là, qui, six mois avant de conquérir ses derniers diplômes de docteur en médecine, et sous l'empire de l'alcool et des charmes séducteurs d'une jeune veuve, en vint à empoisonner un rival à l'aide de l'arsenic et à compromettre gravement la vie d'un autre. Ce jeune homme, soumis longuement à l'observation de plusieurs aliénistes distingués, les laisse très perplexes sur l'intégrité de son cerveau, grâce à ses artifices de simulation. Confié récemment aux soins de M. Cuylits, il fut considéré comme aliéné par notre collègue, qui motive son opinion par l'existence du rapport anormal entre les diamètres transverses maxima de la voûte palatine et de la boite cranienne. Ces deux dimensions se trouvent entre elles dans le rapport de 2 à 6 $^1/_2$, tandis que le rapport normal est de 1 à 4 environ.

Une discussion s'engage à ce sujet entre MM. Cuylits, Ranwez, Swolfs et Dumont.

Enfin, pour épuiser l'ordre du jour, M. le Dr De Lantsheere communique *Un cas de rétinite diabétique simple*. On sait que les affections de ce genre sont très rares. A ce seul titre déjà, le cas signalé par M. De Lantsheere ne manque pas d'intérêt. Cette note paraîtra dans la seconde partie des *Annales*.

Enfin M. le Président adresse des remerciements aux membres de la Policlique pour l'aimable accueil qu'ils ont fait à la section dans leur magnifique local.

Cinquième section.

—

La séance est présidée par Mgr S. Nicotra, secrétaire de la Nonciature apostolique, président; M. le chanoine Henri et M. l'avocat Fallon, de Namur, invités, assistent à la séance. Le procès-verbal de la dernière séance est lu et approuvé.

M. Julin, secrétaire de la section, donne ensuite lecture de son ***Rapport sur les monographies de familles*** dans le système de Frédéric Le Play. Voici un résumé de ce travail :

La méthode des monographies de familles est une méthode analytique qui part de la molécule sociale, la famille, pour arriver à la connaissance du corps social. On fait à cette méthode deux objections principales : la première, c'est qu'en cette matière on ne peut conclure du cas particulier au cas général. Le Play a justement répondu à cette critique en faisant remarquer que le but de la monographie est de rechercher les caractères généraux qui se peuvent rencontrer dans le sujet soumis à l'observation.

Ce que l'auteur de la monographie doit fixer dans son étude, c'est le type social.

On a aussi prétendu que, dans la méthode des monographies, l'auteur était dans l'impossibilité de rattacher le sujet de ses observations à un milieu social quelque peu complexe, et de donner de ce milieu une vue synthétique. Mais ce reproche repose sur une simple erreur : Le Play a fait place dans sa monographie aux éléments divers de la constitution sociale.

Les services que peut rendre la monographie de familles se peuvent considérer sous trois aspects : économique, social, statistique.

Au point de vue économique, la comparaison de deux monographies est pleine d'enseignements. Quant aux recueils de budgets ouvriers, les gouvernements leur ont demandé la solution de bien des problèmes : tel celui du protectionnisme aux États-Unis lors de l'enquête sur le coût de production, et celui des conséquences de la dénonciation des traités de commerce, lorsque le gouvernement belge fit une enquête sur les salaires et les budgets ouvriers.

Beaucoup de questions sociales se trouvent aussi élucidées par la monographie. Celle de l'emploi des femmes et des enfants dans les établissements industriels se trouve dans ce cas.

Quant à l'utilité qu'on peut retirer de la monographie au point de vue statistique, elle a été mise en relief d'une curieuse

façon par la commission des finances du Sénat américain qui a réussi, au moyen de l'étude des budgets, à déterminer quelles étaient les réactions des tarifs Mac-Kinley sur les salaires et sur les prix aux États-Unis.

Comme méthode, la monographie a fait ses preuves ; c'est, en effet, une méthode d'une élasticité remarquable que celle qui peut s'appliquer avec un égal succès à des conditions aussi diverses que celles des familles étudiées par Le Play et ses continuateurs !

La méthode des monographies a été conçue par Le Play après de nombreuses observations, qui ne lui prirent pas moins de vingt-cinq ans. La monographie comprend trois parties principales : la première, sous la dénomination d'observations préliminaires, définit le lieu, l'organisation industrielle et la famille, étudie les moyens et le mode d'existence de celle-ci et retrace les phases principales de son existence. La deuxième partie est consacrée au budget des recettes (revenus des propriétés, produits des subventions, salaires, bénéfice des industries) et à celui des dépenses (nourriture, habitation, vêtements, besoins moraux, dettes, impôts et assurances). La troisième partie étudie les particularités de l'organisation sociale.

Le rapporteur exprime l'avis que cette dernière partie n'a pas toujours reçu, dans les études monographiques, le développement qu'elle doit comporter. D'après lui, elle devrait se subdiviser en deux parties : la première étudierait les conditions naturelles de l'industrie, la seconde, son organisation sociale.

Le rapporteur croit encore qu'en Belgique, les grandes enquêtes officielles devraient être complétées par de nombreuses monographies.

La Belgique, à ce point de vue, pourrait être divisée en trois grandes régions : la région agricole, la région industrielle et la région des villes. M. Julin entre dans des développements étendus sur ce point et termine en exprimant le vœu de voir la cinquième section de la Société scientifique s'occuper activement des études monographiques.

M. le Président félicite M. Julin de la façon dont il s'est acquitté de sa tâche. Avec le rapporteur, il estime qu'il y aurait une grande utilité pour la Belgique à connaître, par le moyen des monographies, la situation exacte des principaux groupes de travailleurs; la division proposée par M. Julin lui paraît propre à réaliser ce but.

M. le chanoine Henry joint ses félicitations à celles de M. le Président. M. le rapporteur a bien fait d'attirer l'attention de la cinquième section sur une méthode aussi claire, aussi précise et aussi souple à la fois que celle de Le Play.

M. Julin, pour répondre au désir exprimé par quelques membres, présente quelques réflexions sur la partie de la monographie concernant les observations sociales; des points très curieux, dit-il, peuvent être mis en lumière par la monographie, tandis qu'il seraient négligés par la statistique officielle. M. Julin cite, comme exemple, la localisation du travail dans l'industrie armurière liégeoise et le rôle que jouent dans cette industrie les intermédiaires entre l'ouvrier et le consommateur.

M. Legrand n'est pas d'avis que les intermédiaires soient inutiles et remplissent un rôle parasitaire. S'ils existent, c'est qu'ils sont nécessaires.

M. Julin n'attaque que l'abus; l'intermédiaire inutile doit disparaître : il s'oppose à la libre circulation dans le corps social.

M. le Président croit que la cinquième section ferait chose utile en émettant le vœu de voir ses membres s'occuper pratiquement des monographies de familles.

Ce vœu est adopté à l'unanimité.

M. Éd. Van der Smissen, qui devait faire une communication sur la théorie quantitative dans la théorie générale monétaire, s'est fait excuser. Son travail, confié à la section, n'a pu être lu à cause de l'heure avancée. Cette communication sera renvoyée à la séance de janvier.

VISITE AU MUSÉE ARCHÉOLOGIQUE DE NAMUR.

A une heure et demie, les membres de la Société scientifique se rendent au musée, où ils ont été aussi émerveillés de la richesse et de l'ordre parfait des collections que charmés de l'accueil gracieux et des explications du savant conservateur du musée, M. A. Bequet. Ce musée est l'un des plus remarquables de la Belgique, à plusieurs points de vue. Ce qui le distingue de maintes collections similaires, c'est l'ordre strictement scientifique dans lequel y sont rangés les objets qu'il renferme. Toutes les trouvailles faites en un même endroit — citadelle préhistorique, station belge anté-romaine, villa romaine, cimetière franc — sont réunies dans le musée comme elles l'étaient *in situ*. Parcourir le musée de Namur, c'est faire un cours d'histoire intuitive. On voit défiler sous ses yeux la pauvre civilisation de l'époque de la pierre polie, l'art déjà personnel des Belges de l'époque du bronze et du fer, puis l'art beaucoup plus parfait de leurs descendants pendant la profonde paix dont jouit notre patrie sous la domination romaine. L'invasion des Francs, qui s'établissent dans notre pays et dans une faible partie de la France du nord-est, modifie complètement les conditions de la civilisation : l'art, au lieu de progresser, entre dans une période de décadence, jusqu'à ce que le christianisme vienne le relever et préparer les merveilles de l'art roman et de l'art gothique.

Le savant conservateur du musée appelle l'attention des visiteurs sur une foule de faits intéressants, parmi lesquels nous en citerons un qui mérite d'être connu davantage : la faune ornementale des objets usuels de l'époque mérovingienne est une première ébauche de la faune décorative de l'époque romane.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

A trois heures et quart a lieu, dans le local des séances du conseil, à l'hôtel provincial, l'assemblée générale sous la présidence de M. Henry, professeur de chimie à l'Université de Louvain.

Au bureau prennent place M. Ch. de Montpellier, gouverneur de la province, et M[gr] Delogne, vicaire général, représentant S. G. M[gr] Decrolière, le révérendissime évêque de Namur, qui est en tournée pastorale et a exprimé ses regrets de ne pouvoir assister à la séance.

M. le D[r] Debaisieux, le professeur distingué de l'Université de Louvain, fait une conférence sur *Les grands progrès de la chirurgie moderne* (*).

M. Debaisieux, enfant, ne pouvait passer devant la demeure du chirurgien de l'époque sans qu'un frisson d'épouvante s'emparât de tout son être. C'était le bourreau terrorisant et matant sa victime...; le seul mot de chirurgien évoquait dans l'imagination du jeune étudiant l'effrayant tableau d'opérations terribles.

Aussi ce ne fut que pour plaire à ses parents que le futur professeur embrassa la carrière médicale. Nommé interne en chirurgie dans le service de l'éminent maître à qui il devait succéder, il aima bientôt cette branche de la médecine qui lui inspirait jadis tant de peur et de dégoût.

Il n'y a pas bien longtemps, les chirurgiens les plus habiles pouvaient rarement se féliciter d'un succès. Ils avaient trois adversaires, contre lesquels ils étaient impuissants : la souffrance du patient, l'hémorragie, les infections consécutives à l'opération.

Dans une opération de quelque durée, le patient succombait sous le poids de la douleur; ou bien une hémorragie trop forte compromettait la réussite; et quant tout avait marché à souhait, on n'était point encore certain du résultat, quelque légère que

(*) Cette conférence paraîtra dans la prochaine livraison (janvier 1894) de la *Revue des questions scientifiques*.

fût l'opération. Les maladies septiques assiégeaient l'opéré. Le tétanos, la pourriture d'hôpital, l'érysipèle exerçaient les plus grands ravages. Les suites de l'opération étaient aussi redoutables que l'opération elle-même. L'humble praticien de village obtenait souvent des résultats plus encourageants que le savant professeur d'université, pratiquant la. chirurgie dans un grand hôpital, admirablement aménagé.

Aujourd'hui, il n'en est plus de même : le chirurgien a vaincu la douleur par les anesthésiques, l'hémorragie par les procédés qui assurent l'hémostase, les infections post-opératoires par les traitements antiseptiques ou aseptiques.

L'anesthésie. On songea tout d'abord à produire l'insensibilité et le sommeil, et tous les savants de l'ancien monde partirent à la recherche d'un anesthésique capable d'empêcher la douleur. Longtemps ce fut sans succès. Mais l'on ne se découragea point, et après l'éther et le protoxyde d'azote, on découvrit enfin le chloroforme, qui permet les opérations les plus douloureuses.

L'hémostase. Peu de temps après, von Esmarch, en Allemagne, et Péan, en France, inventèrent et vulgarisèrent des procédés différents pour assurer l'hémostase complète du champ opératoire.

Antisepsie et asepsie. Enfin, Pasteur démontra, par ses ingénieuses expériences, qu'il existe dans l'air des germes morbides dont il fallait préserver les plaies opératoires. Lister, l'illustre chirurgien d'Édimbourg, s'appuyant sur ces remarquables travaux du savant français, introduisit et vulgarisa les procédés antiseptiques.

Aujourd'hui l'asepsie veut détrôner l'antisepsie, qui n'est point exempte d'inconvénients. Il est prouvé que les germes infectieux résident surtout sur les instruments et les objets de pansement. Les antiseptiques sont des microbicides; les soins aseptiques, adoptés d'abord en Allemagne, et qui tendent à se généraliser, peuvent être appelés des microbifuges.

Grâce à l'anesthésie, à l'hémostase, à l'antisepsie et à l'asepsie, les opérations les plus délicates sont tentées et le plus souvent couronnées de succès. Les opérations sur les viscères, qu'on n'osait risquer autrefois; l'enlèvement de l'utérus et de ses annexes, d'un

sein, d'une partie des poumons, du foie, de l'estomac, de l'intestin et même du cerveau, se pratiquent couramment de nos jours.

M. le professeur Debaisieux a retracé en véritable artiste l'historique de ces bienfaisantes découvertes qui font la gloire de notre siècle. Dans une belle péroraison, le conférencier fait des vœux pour que le siècle à venir soit aussi fécond en heureux résultats. Le cancer et la tuberculose, ces deux fléaux du genre humain, sont encore à vaincre. C'est au XXe siècle que doit échoir l'honneur de leur curabilité.

M. le président se fait envers M. Debaisieux l'interprète des remerciements et des félicitations de l'assistance, puis il remercie dans les termes suivants tous ceux qui, à Namur, ont contribué à procurer à la Société une session aussi agréable qu'utile :

Messeigneurs (*), Mesdames, Messieurs,

La Société scientifique a fait aujourd'hui une expérience qui, pour n'être pas nouvelle, est toujours intéressante dans son résultat : elle a constaté que, pour rendre agréable le séjour des villes, les dispositions des hommes sont plus puissantes que celles des éléments.

Malgré la mauvaise humeur du temps, la Société scientifique a passé une journée excellente à Namur.

Elle aime à vous le dire et elle tient à vous adresser tous ses remerciements.

Je suis honoré d'être appelé à remplir, en ce moment, en son nom, ce devoir de gratitude.

Je salue tout d'abord, dans la personne de son digne représentant, le chef vénéré du diocèse. Sa Grandeur Mgr Decrolière nous avait promis d'honorer de sa présence notre assemblée générale, mais les devoirs de son ministère pastoral l'ont retenu loin de nous. Qu'il veuille bien agréer l'expression respectueuse de nos regrets.

(*) Mgr Delogne, Mgr Pirard, vicaires généraux, etc.

La Société scientifique de Bruxelles n'est pas seulement un collège d'hommes adonnés à la culture des sciences, ou d'amateurs de la science; par le but élevé qu'elle s'est proposé et qu'elle poursuit dans la mesure de ses forces, elle est au fond une véritable société religieuse. Elle a inscrit au frontispice de ses statuts, qu'il n'y a pas, qu'il ne peut pas y avoir de dissentiment réel entre la science et la foi. Pénétrée de cette vérité, elle s'efforce de démontrer par le fait, par le travail personnel de ses membres, que l'esprit religieux, dont l'esprit catholique est l'incarnation parfaite et intégrale, n'est pas, comme on le prétend, ou comme on affecte de le croire dans certains milieux, hostile, contraire et antipathique à l'esprit scientifique, à la culture des sciences et à leur développement.

Dans cette conviction qui l'anime et la dirige, la présence de nos chefs spirituels dans nos réunions est pour nous plus qu'un honneur et une joie, c'est un encouragement et une force.

Je remercie l'éminent magistrat qui est à la tête de cette belle province, et chez qui la Société scientifique a reçu l'hospitalité la plus courtoise et la plus honorée. Les salons de l'hôtel du Gouverneur de Namur se sont ouverts pour elle comme aux jours des grandes réceptions et des grandes solennités officielles.

Nous remercions chaleureusement aussi M. le Président du Cercle catholique, qui a bien voulu nous prêter les salons de la société qu'il dirige avec tant de distinction pour les réunions de trois de nos sections, et qui nous avait offert la grande salle des fêtes du Cercle pour cette assemblée même.

J'associe à ces remerciements le Révérend Père Recteur du grand et beau collège de Notre-Dame de la Paix, cette quasi-université namuroise, qui a abrité la troisième section, et MM. les membres de la Policlinique qui ont accueilli leurs confrères médecins dans leurs magnifiques installations.

Un grand nombre de nos membres ont visité, il y a quelques heures, le Musée archéologique. La Société archéologique de Namur occupe un rang distingué dans les cercles scientifiques de Belgique; ses collections sont belles, et au point de vue des antiquités franques, d'une richesse que l'on dit sans égale.

J'adresse aussi nos meilleurs remerciements à son savant conservateur, M. Bequet.

Au risque de devenir monotone, je dois, Messieurs, continuer encore, car je n'ai pas accompli tous mes devoirs et je n'en veux oublier aucun.

Je remercie enfin toute cette assistance distinguée qui, répondant à notre invitation, est venue rehausser de sa présence l'éclat de notre assemblée générale.

Mes confrères m'en voudraient si je n'avais en ce moment une mention spéciale pour ces dames, qui sont venues ici, non sans un certain courage, ajouter à cette grave réunion le charme et les grâces de leurs personnes.

Vous me permettrez bien cependant, Mesdames et Messieurs, de croire que votre bonne volonté n'a pas été sans récompense, car c'est certainement une bonne fortune que d'entendre traiter, avec une aussi haute compétence et en un langage aussi élevé, un sujet aussi palpitant d'intérêt que celui des grands progrès réalisés par la chirurgie moderne.

Laissez-moi ajouter une observation et formuler un vœu. La main de mon excellent collègue est douce et délicate, comme sa langue et sa plume; mais plaise à Dieu que jamais vous ne soyez dans la nécessité de recourir aux ressources puissantes de sa science et de son habileté, car le fer dans cette main de velours est toujours le fer, avec son glacial tranchant.

Messieurs, il y a quelques années, le Conseil de la Société scientifique, dont le siège est à Bruxelles, résolut, dans sa sagesse, de tenir la session d'octobre dans une ville de province, imitant en cela l'exemple des grandes associations scientifiques d'Allemagne, d'Angleterre et de France, qui tiennent leurs assises annuelles successivement dans les diverses grandes villes de ces régions.

Nos villes universitaires, Louvain, Gand et Liége, reçurent successivement sa visite en 1890, 1891 et 1892. C'était dans l'ordre.

A quelle ville la Société irait-elle, cette année, demander l'hospitalité?

C'est la question que le Conseil eut à résoudre dans sa séance du mois de juin dernier.

Au milieu d'autres, le nom de Namur fut prononcé et réunit tous les suffrages.

On fit remarquer à bon droit que si votre ville doit céder le pas à d'autres plus populeuses, sous certains rapports, il n'en est pas, en dehors des centres universitaires, réunissant autant d'éléments de savoir, où le goût des choses de l'esprit et de la science est plus vivace, plus intense et plus général.

C'était le cas de se souvenir de cette parole que l'amour-propre local, légitime d'ailleurs, a érigée à la hauteur d'une devise communale : *Nameur po tô*. On n'y manqua pas.

Je suis heureux de constater, Messieurs, que toutes les prévisions, que toutes les espérances du Conseil ont été réalisées, et c'est sur cette pensée que je termine en vous disant : Merci et au revoir.

M[gr] Delogne se fait l'interprète de la sympathie et du vif intérêt que Sa Grandeur M[gr] l'évêque porte à la Société scientifique, et lui exprime ses félicitations et ses encouragements.

M. le Gouverneur prend aussi la parole, et, dans une allocution pleine d'humour et d'à-propos, félicite le savant conférencier et la Société scientifique ; il remercie M. le président pour ses paroles élogieuses, mais bien méritées, à l'adresse de la ville de Namur. « Revenez-nous le plus tôt possible, dit M. le Gouverneur, et vous serez toujours bien reçus. »

Après quelques mots de remerciements encore, M. le président déclare close la session d'octobre de la Société scientifique.

SESSION DU JEUDI 25 JANVIER 1894
A BRUXELLES.

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

M. Mansion soumet à la section, qui en autorise l'impression, un certain nombre d'additions, d'une nature purement explicative, introduites par M. de Salvert dans sa *Note sur l'addition des fonctions hyperelliptiques.*

M. Mansion lit la note suivante : *Sur une opinion de Galilée relative à l'origine commune des planètes.*

Les célèbres *Dialogues* de Galilée *sur les deux principaux systèmes du monde, celui de Ptolémée et celui de Copernic,* renferment un grand nombre de vues originales sur des sujets de physique générale, de mécanique et d'astronomie qui donnent à ce livre un grand intérêt historique.

Nous allons en faire connaître une, bien ignorée aujourd'hui, où Galilée esquisse une théorie de l'origine commune des planètes. Cette théorie, bien que très imparfaite et même contraire aux faits, peut cependant avoir exercé une certaine influence, directe ou indirecte, sur Descartes, Leibniz, Buffon, Kant et Laplace, en appelant leur attention sur ce problème de l'origine du système solaire.

On trouve la théorie de Galilée dont il s'agit dans la *Première journée* des *Dialogues* (*). Après avoir exposé les lois de la chute des corps pesants sur les plans inclinés, l'un des trois interlocu-

---

(*) *I Dialoghi sui massimi sistemi Tolemaico e Copernicano di* GALILEO GALILEI (Milano, Sonzogno, 1877), pp. 40-41, ou traduction allemande de E. STRAUSS (Leipzig, Teubner, 1891), p. 31.

teurs des *Dialogues*, Salviati, qui représente les idées de Galilée, conclut de la manière suivante : « Ainsi, sur un plan horizontal, un mobile n'acquerra jamais si peu de vitesse que ce soit, d'une manière naturelle ; il ne s'y mouvra pas du tout [si la nature — nous dirions la pesanteur — agit seule]. Mais le mouvement sur une ligne horizontale, qui n'a ni inclinaison, ni hauteur, est, [au fond] (*), un mouvement circulaire autour du centre. Donc le mouvement circulaire ne peut jamais être acquis par un mobile sans un mouvement rectiligne antérieur; mais une fois acquis, quel qu'il soit, il se continuera perpétuellement avec une vitesse uniforme. Je pourrais expliquer et démontrer autrement cette même vérité, mais je ne veux pas interrompre notre principal raisonnement par de si grandes digressions ; il vaut mieux y revenir à une autre occasion, surtout que nous nous sommes occupés de cette proposition, non pour en donner une démonstration nécessaire, mais pour appuyer une idée de Platon. Mais je veux y ajouter une observation de notre Académicien [Galilée lui-même], qui lui appartient en propre et qui a quelque chose de merveilleux.

» Imaginons que, parmi les décrets du divin Architecte, se soit trouvé la pensée de créer dans le monde ces globes que nous voyons se mouvoir sans cesse en cercle ; qu'il ait déterminé le centre de leurs révolutions ; qu'il ait placé ce centre dans le Soleil immobile. Ensuite, ayant formé tous ces globes dans le même lieu, supposons qu'il leur ait donné une tendance à se mouvoir jusqu'à ce qu'ils aient acquis chacun le degré de vitesse qui paraissait convenable à l'intelligence divine ; cette vitesse ayant été acquise par chacun d'eux, imaginons qu'ils commencent à se mouvoir en cercle, avec cette même vitesse. Que l'on cherche à quelle hauteur ou distance du Soleil se trouvait le lieu où ces globes furent originairement créés, et il peut se faire que la création de tous ces globes se soit faite en un seul et même lieu.

» Pour résoudre cette question, il faut emprunter aux astro-

(*) En effet, il n'y a de vraie horizontale, ou ligne normale à la direction de la pesanteur, que le cercle.

nomes les plus habiles les données relatives à la grandeur des cercles où circulent les planètes et au temps de leurs révolutions. Cela connu, on pourra savoir, par exemple, combien de fois le mouvement de Jupiter est plus rapide que celui de Saturne? Si l'on trouve, comme cela est en réalité, que Jupiter se meut plus vite, il faut, puisqu'ils sont descendus d'une même hauteur, que Jupiter soit descendu plus bas que Saturne; nous savons au reste qu'il en est vraiment ainsi, puisque l'orbite de Jupiter est inférieure à celle de Saturne.

» Mais allons plus avant. De la proportion qui existe entre les vitesses de Jupiter et de Saturne, de la distance qui existe entre leurs orbites et de la loi de l'accélération naturelle, on peut déduire à quelle hauteur ou distance du centre de leurs révolutions se trouvait leur point de départ. Cet endroit retrouvé et déterminé, on peut chercher si Mars, en descendant de là jusqu'à son orbite, a en fait une vitesse et une orbite identiques à celles que donne le calcul. On peut faire la même recherche pour la Terre, pour Vénus et pour Mercure et la grandeur des orbites. Or les vitesses réellement observées sont tellement voisines de celles que donne le calcul que c'est vraiment merveilleux. »

Si l'on met en équation cette singulière conception de Galilée en supposant que chaque planète se soit d'abord dirigée vers le Soleil puis ait brusquement changé de direction, une fois arrivée à son orbite actuelle, on trouve qu'elle équivaut à supposer la relation suivante entre les rayons R, R′ des orbites de deux planètes dont les durées de révolution sont T et T′ :

$$R + k\frac{R^2}{T^2} = R' + k\frac{R'^2}{T'^2},$$

k étant une constante positive. Comme on a, en réalité, à peu près

$$R^3 : T^2 = R'^3 : T'^2 = l;$$

d'après la troisième loi de Képler, l étant une constante positive, on devrait aussi avoir

$$R + kl\frac{1}{R} = R' + kl\frac{1}{R'},$$

ou, après quelques réductions

$$RR' \doteq kl,$$

relation évidemment en désaccord avec les faits.

En 1632, époque où ont paru les *Dialogues*, la troisième loi de Képler était publiée depuis treize ans. Galilée semble avoir eu le tort, comme on le voit, de ne tenir aucun compte de cette découverte capitale de l'illustre astronome allemand, et c'est ainsi qu'il s'est laissé entrainer à une conception purement subjective. Mais peut-être peut-on donner un autre sens à sa singulière supposition.

M. Goedseels ajoute quelques développements à sa note d'octobre 1893 : *Sur la mesure du temps et le mouvement absolu.*

Cette communication donne lieu à une discussion à laquelle prennent part la plupart des membres de la section.

M. Pasquier expose, à cette occasion, d'après la *Mécanique céleste* de M. Tisserand, où en est la question de l'invariabilité du jour sidéral.

M. Mansion fait connaitre une méthode élémentaire pour établir la relation qui existe entre les deux intégrales eulériennes.

Enfin, une Note de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin : *Sur le problème de la duplication du cube,* est renvoyée à une séance ultérieure.

Deuxième section.

—

MM. Amagat, Chautard, Louis Henry s'excusent de ne pouvoir assister à la séance.

Le R. P. Thirion, président de la section, expose, au nom de M. Van der Mensbrugghe, une *Démonstration très simple de la cause commune de la tension superficielle et de l'évaporation des liquides :*

« Aujourd'hui les physiciens sont d'accord, je pense, pour

admettre que tout se passe dans la nature comme si les molécules d'un corps étaient soumises à des forces attractives d'une part, et de l'autre à des forces répulsives. On admet encore généralement que si, par le rapprochement des molécules, les forces attractives augmentent, les forces répulsives augmentent aussi, mais plus rapidement que les premières. C'est en m'appuyant sur ces deux propositions que je vais tâcher de montrer l'existence d'une cause unique de la tension superficielle et de l'évaporation des liquides.

A cet effet, soit une masse liquide renfermée dans un vase quelconque : seulement nous ne pouvons supposer cette masse en équilibre permanent, car pendant le temps nécessaire pour trouver les forces qui sollicitent les particules de la surface libre, celles-ci pourraient s'être répandues dans l'atmosphère en vertu de l'évaporation. Nous ne supposerons pas non plus une constitution uniforme et permanente de toute la masse, par la raison qu'un liquide ne peut se changer en vapeur sans passer par des états intermédiaires où la densité va en décroissant.

C'est pourquoi nous admettrons, à titre purement provisoire, une densité égale partout, et, pour savoir si l'équilibre est possible, nous allons examiner successivement quelles sont les forces d'où dépend la cohésion intérieure, puis celles qui produisent la cohésion dans le voisinage immédiat de la surface libre.

Autour d'un point intérieur quelconque O (fig. 1), concevons une sphère décrite avec le rayon d'activité de l'attraction moléculaire correspondant à la température donnée; pour connaître le degré de cohésion intérieure, il ne suffit pas de dire que la particule O est en équilibre sous l'action de toutes les forces attractives des points matériels compris dans la sphère; car cet équilibre aurait lieu pour un degré de cohésion quelconque du liquide, pourvu qu'il fût le même partout. Il faut, au contraire, consi-

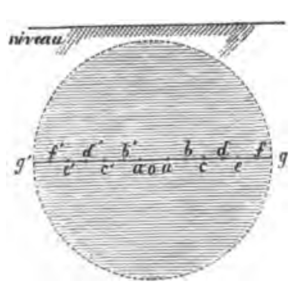


Fig. 1.

dérer toutes les forces qui tendent à rapprocher de O les particules immédiatement voisines; parmi ces forces figurent d'abord celles qui s'exercent entre toutes les molécules comprises dans la sphère; car si la particule O est attirée par ces dernières, réciproquement celles-ci sont attirées par elle; de là un système de forces qui tendent à augmenter la cohésion autour de O; mais il y en a encore beaucoup d'autres produisant le même effet; car considérons en particulier les molécules situées sur un diamètre quelconque $g'Og$: chacune d'elles (par exemple d), située sur l'une des moitiés du diamètre, sera attirée par une ou plusieurs molécules ($a'b'$) situées sur l'autre moitié ; et ces attractions auront encore une tendance à faire croître la cohésion en O; on peut faire le même raisonnement pour l'ensemble de tous les diamètres qu'on peut mener dans la sphère, ce qui permettra d'obtenir l'ensemble de toutes les forces produisant le degré de cohésion en O. A ce degré de cohésion correspond nécessairement une force répulsive capable d'empêcher le rapprochement plus prononcé des molécules.

Recherchons actuellement les forces attractives produisant l'état de cohésion en un point quelconque O′ de la couche superficielle ayant pour épaisseur le rayon r de l'attraction moléculaire : si l'on construit encore la sphère de rayon r et ayant le point O′ pour centre (fig. 2), on voit immédiatement qu'une portion amb de cette sphère est en dehors du liquide ; donc l'ensemble de toutes les particules *attirées* directement par O′ produira autour de ce point une cohésion moindre que si la sphère avait été remplie de liquide; quant aux autres actions d'où dépend encore la cohésion en O′, il est évident que, pour tous les diamètres compris dans le volume $bO'a'aO'b'$, le résultat sera le même que pour un diamètre quelconque d'une sphère pleine; au contraire, pour tous les diamètres tels que $cnO'c'$, dont une extrémité

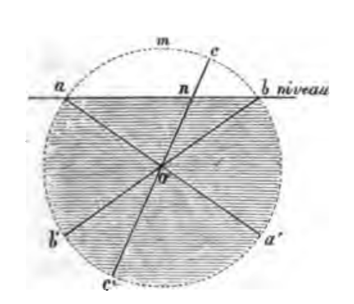


Fig. 2.

aboutit à un point quelconque de la zone *amb*, sauf ceux de la circonférence de la base *ab* même, les effets sont moindres que pour des diamètres garnis de molécules sur toute leur longueur. Il y a donc dans la couche superficielle deux causes d'affaiblissement de la force de cohésion résultante, causes qui sont d'autant plus prononcées que le point O′ est plus près de la surface libre ; à cette surface même, en O″ par exemple (fig. 3), les forces attractives n'émanent que de molécules situées dans un hémisphère, et conséquemment le degré de cohésion arrive à son minimum ; il suit de là que la force répulsive capable de maintenir en équilibre les particules de la couche superficielle d'épaisseur *r* est d'autant plus petite que ces particules sont plus près de la surface libre et prend une valeur minima aux points de la surface même.

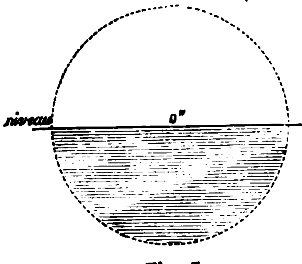


Fig. 3.

Cela étant, nous pouvons conclure qu'en vertu de la parfaite élasticité des liquides, l'excès de la force répulsive nécessaire à l'intérieur de la masse liquide, sur celles qui suffisent dans la couche superficielle, doit avoir pour effet d'écarter entre elles les molécules de la couche superficielle, et cela d'autant plus fortement qu'elles sont plus voisines de la surface libre. Il doit naître conséquemment, dans le sens tangentiel, un ensemble de forces de tension élémentaires dont la somme constitue la tension superficielle totale mesurée par l'expérience, et dans le sens normal, une tendance des particules à s'écarter de la masse liquide pour se répandre dans l'air. Ce qui doit augmenter encore cette tendance, c'est le fait suivant : comme le travail d'écartement des molécules est toujours accompagné d'un décroissement de température, la température ambiante agit incessamment pour rétablir l'équilibre calorifique dans toute la masse liquide : de là une cause de plus en vertu de laquelle peut se produire l'évaporation.

Pour terminer cette petite note, je crois utile de répondre à

une objection qu'on pourrait élever contre le raisonnement qui précède : j'ai dit que la particule centrale O attire toutes les molécules comprises dans la sphère de rayon r, et que de là résulte un système de forces qui tendent à augmenter la cohésion autour du point O : on peut objecter que chacune de ces forces serait détruite par une autre force précisément égale et contraire, émanant d'une molécule située hors de la sphère. Pour réfuter cet argument, il suffit de se rappeler que les forces attractives en jeu sont très considérables, et qu'ainsi elles peuvent produire leur effet de proche en proche jusqu'à la surface limite de la masse liquide considérée; au surplus, je dois faire remarquer que les forces attractives sont contrebalancées partout non pas par d'autres forces attractives, mais bien par des forces répulsives. Ainsi, par exemple, si l'on imaginait que, pour un instant, la force répulsive subit une diminution autour d'une molécule intérieure, aussitôt les forces attractives exercées par cette molécule sur toutes celles de la sphère dont elle est le centre, manifesteraient leur action malgré la présence des molécules ambiantes qui se déplacent avec la plus grande facilité, aussi longtemps que l'on ne doit pas modifier leurs distances mutuelles.

Le R. P. Bareel, S. J., fait ensuite la communication suivante *sur de récentes recherches relatives à la flamme :*

Le 15 septembre 1893, M. le professeur Arth. Smithells donnait, devant une réunion de l'Association britannique, à Nottingham, une conférence scientifique sur la flamme.

Nous résumons ici très succinctement les principaux faits mis en lumière par le physicien anglais.

Après avoir rappelé que la flamme n'est, somme toute, qu'un mélange explosif en combustion au moment même de sa formation, M. Smithells utilise la propagation rapide de cette explosion à l'intérieur d'un tube de verre pour étudier le phénomène dans le détail.

En effet, lorsqu'on ménage convenablement l'accès de l'air dans un gaz combustible brûlant au sommet d'un tube de verre fixé sur un bec Bunsen, on remarque qu'à certains moments la

flamme se dédouble, et qu'un petit cône bleuâtre descend brusquement au fond du tube.

Avec un peu de soin, on peut arriver, malgré l'état critique de ce mélange explosif, et cette espèce d'équilibre instable où se trouve le petit cône mobile, à faire osciller celui-ci comme un piston, entre certaines limites. Pendant ce temps, la seconde partie de la flamme continue à brûler, immobile, au sommet du tube.

Or, voici le moyen de tenir les deux cônes de notre flamme dans un état de séparation permanente. Un tube en verre, étranglé dans sa partie moyenne, fait tous les frais : posons-le sur le brûleur à la place du tube uni dont nous nous sommes servis d'abord. Cette fois, dans son mouvement de descente, le cône intérieur ne peut dépasser l'étranglement : la vitesse du gaz, augmentée en cet endroit par le rétrécissement du tube, s'y oppose.

Maintenant que nous voilà pourvus d'un appareil capable de disséquer la flamme, introduisons une pipette dans l'intervalle des deux cônes, et soumettons à l'analyse le gaz ainsi recueilli.

Le tableau ci-dessous fait ressortir, pour quelques flammes, les différences de composition chimique observées à l'aide du séparateur dans la combustion de différents gaz.

Combustible	Composition.	Produits formés par la combustion	
		partielle.	totale.
Hydrogène	H	H_2O	H_2O
Protoxyde de carbone. .	CO	CO_2	CO_2
Carbone	C	CO	CO_2
Cyanogène	CAz	CO + Az	CO_2 + Az
Hydrogène sulfuré . . .	H_2S	?	H_2O + SO_2
Hydrocarbures.	CH_4, etc.	CO, CO_2, H et H_2O	CO_2 + H_2O

Tel est le résultat obtenu par M. Smithells. Il est fécond en particularités intéressantes que nous ne pouvons développer ici. Contentons-nous de signaler le résultat inattendu auquel est arrivé M. Smithells en recherchant les phases du conflit qui naît entre l'hydrogène et le carbone des hydrocarbures en présence de l'oxygène. Le carbone et l'hydrogène, dans le cône intérieur de la flamme, ne rencontrent pas assez d'oxygène pour leur combustion simultanée; il s'agit de savoir lequel des deux l'emportera. On se prononcerait volontiers pour l'hydrogène, puisque, dans les conditions ordinaires, ce corps a pour l'oxygène une affinité plus puissante que le carbone.

Or, si nous en croyons l'analyse faite par M. Smithells, il se forme dans le premier cône de la flamme d'un hydrocarbure (CH_4) les gaz suivants :

CO	8.7	17.9.	gaz combustibles.
H	9.2		
CO_2	4.1	20.1.	gaz brûlés.
H_2O	16		
Az.	62		
	100		

Total d'air employé	78.5	Oxygène . . .	16.5
		Azote.	62
Total d'air encore nécessaire pour achever la combustion	42.9	Oxygène . . .	9
		Azote.	33.9

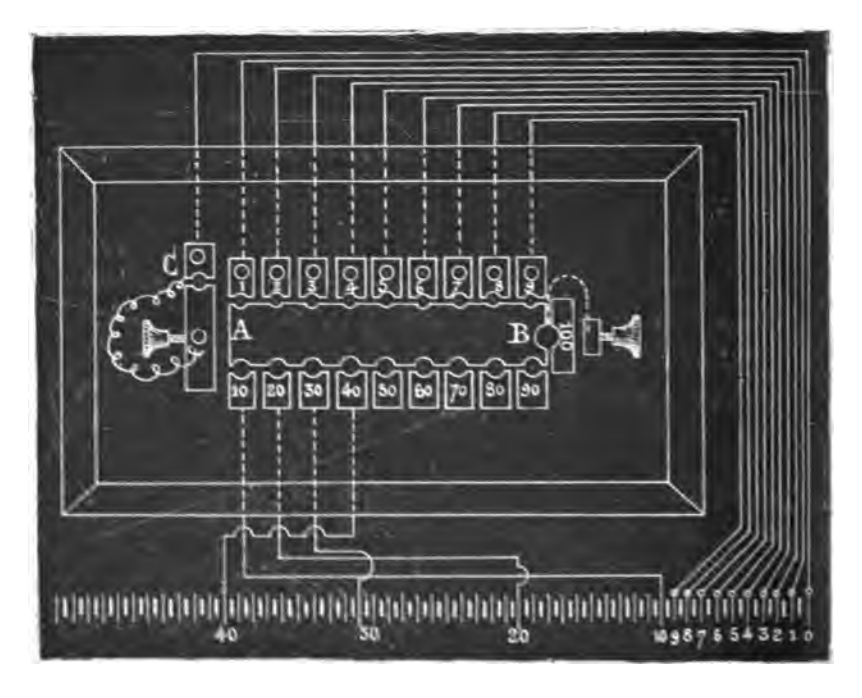
Ainsi, dans le premier cône, les deux tiers du carbone sont brûlés pour former CO, un tiers pour former CO_2; tandis que moins des deux tiers de l'hydrogène sont brûlés et plus d'un tiers reste à l'état de liberté. Ce serait donc le carbone qui brûlerait de préférence à l'hydrogène.

Quant au cône extérieur, il est dû à la combustion du protoxyde de carbone et de l'hydrogène du cône intérieur non encore combinés.

Plusieurs des faits et des conséquences présentés par le conférencier de Nottingham ont soulevé des objections chez des

physiciens du reste très autorisés. Ce qui n'offre pas de doute, c'est que les phénomènes de combustion sont en général beaucoup plus complexes qu'ils ne paraissent. Cette question de la flamme, en particulier, est très obscure, il faut bien l'avouer, et nous appelons de tous nos vœux le jour où la chose deviendra définitivement aussi lumineuse que le sujet.

M. Félix Leconte dessine et explique un nouveau tableau commutateur à combinaisons soustractives. Supposez que l'on ait besoin, pour des expériences de cours ou de laboratoire, de grouper en série un nombre d'éléments variant de 1 à 100. On joindra, comme le montre la figure ci-contre, différents points de la pile aux plots du tableau commutateur, et avec 20 fils seulement le problème sera résolu.



Les 10 plots supérieurs sont réunis aux premiers éléments, les 10 plots inférieurs sont reliés aux éléments dont le rang est un

multiple de 10. Une barre de cuivre intermédiaire, avec laquelle on peut mettre tous les plots en communication électrique, porte une prise de courant pour le circuit extérieur. La seconde prise de courant se trouve sur le plot n° 0, mis en communication avec le positif des premiers éléments.

Pour avoir un élément en circuit, on met une fiche mobile entre la barre AB et le plot 1, tous les trous étant libres, sauf C.

Pour en avoir 2, 3, 4,... 9, on met les fiches entre la barre et les plots 2, 3, 4,... 9. De même pour en avoir 10, 20, 30,... 100.

Pour en avoir 19, par exemple, on met la fiche mobile au plot 20, on enlève la fiche C et on la fixe dans le trou figuré au milieu du plot 1. On a ainsi en circuit 20 éléments moins le premier, c'est-à-dire 19.

Pour en avoir 25, on plante la fiche mobile au plot 30 et la fiche C au milieu du plot 5. On a alors en circuit 30 — 5 = 25 éléments. Et ainsi de suite. Les 100 éléments sont reliés en série d'une manière permanente.

Le président de la section, R. P. J. Thirion, termine la séance par l'exposé de quelques résultats obtenus avec des piles dont les électrodes, de même nature, présentent entre elles une différence physique.

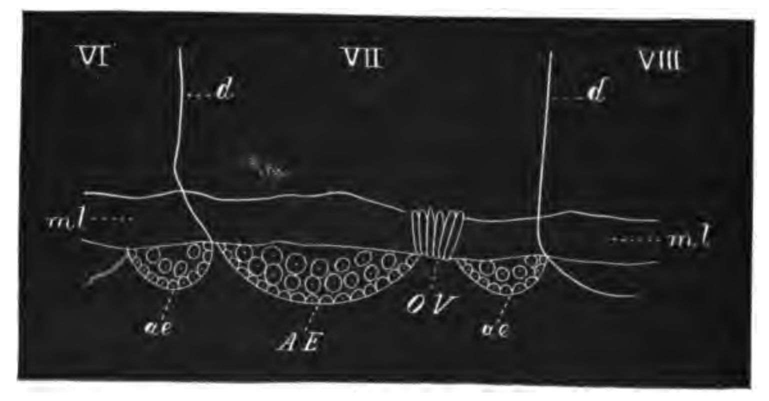
Troisième section.

L'ancien secrétaire de la section ayant donné sa démission, le Conseil a chargé le R. P. Van den Gheyn de le remplacer jusqu'à l'époque des élections annuelles, à la session de Pâques.

Le R. P. H. Bolsius, S. J., présente quelques observations sur l'anatomie de la *Branchiobdella parasita* et de la *Mesobdella gemmata*, avec préparations microtomiques à l'appui.

I. Branchiobdella parasita (*).

Fig. 1.



Grossissement, ± 100 fois, lin.

LÉGENDE.

VI, VII, VIII : 6e, 7e, 8e somites, comptés depuis la partie céphalique. *d*, *d* : dissépiments. — *ml*, *ml* : muscles longitudinaux. — *ae*, *ae* : petits anneaux extérieurs. — AE : grand anneau extérieur. — OV : oviducte.

Les oviductes (OV) sont placés symétriquement dans le septième somite. Ils sont difficilement visibles sur l'animal non sectionné. Cela tient d'abord à ce que ces orifices sont extrêmement rétrécis (5 à 7 μ); ensuite à ce qu'ils sont cachés au fond du sillon qui sépare le grand et le petit anneau (AE, *ae*).

La structure de l'oviducte apparaît fort simple. Quelques muscles extraordinairement faibles, placés circulairement et traversant la couche musculaire longitudinale (*ml*), forment tout le conduit.

Nous n'avons pas encore pu constater si ce conduit est sur-

(*) M. Raph. Blanchard nous a communiqué la synonymie suivante :
Branchiobdella parasita Braun, 1805 = *Hirudo parasita* Braun, 1805 = *Branchiobdella astaci* Odier, 1823 = *Microbdella astaci* Gervais, 1845 = *Astacobdella Roeseli* Diesing, 1850.



Fig. 3.

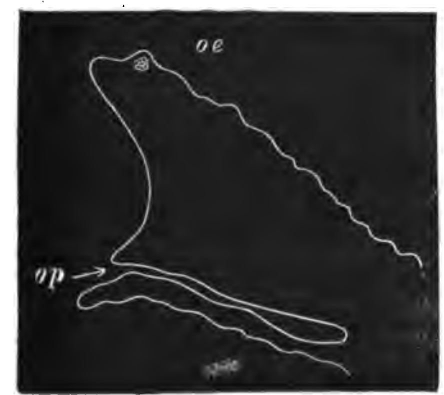


Fig. 2.



Fig. 4.



LÉGENDE.

Fig. 2. *Mesobdella gemmata*; grossie ± 3 fois
y-z : ligne médiane. — x: indication de la coupe représentée dans la fig. 3.

Fig. 3. Schéma de la *cavité paire* débouchant à l'intérieur de la circonférence de la ventouse antérieure; grossie ± 25 fois.
oe : œil. — *op* : orifice de la *cavité paire*.

Fig. 4. Coupe sagittale selon y-z de la fig. 2, dans la partie terminale; grossie ± 25 fois.
VP : ventouse postérieure. — *oa* : orifice anal. — *cg* : chaine ganglionnaire. — *oi* : orifice de la *cavité impaire*.

monté d'un entonnoir aspirant les œufs détachés de l'ovaire; nous le soupçonnons cependant.

Remarquons que les oviductes étant au nombre de deux, et le *receptaculum seminis* (voyez la figure du *Bulletin* précédent) étant unique et médian, il s'ensuit que la fécondation chez la *Branchiobdella parasita* doit avoir lieu après la ponte des œufs, l'animal versant sur ceux-ci la liqueur spermatique qu'un autre individu a introduite dans ce réceptacle.

A propos de notre figure de *Branchiobdella parasita* dans le *Bulletin* de la réunion précédente, nous croyons pouvoir maintenir l'indication ♀ pour le *receptaculum seminis*, et ne pas devoir le transporter aux orifices des oviductes. Ce signe conventionnel se traduit : *orifice sexuel passif;* or, c'est l'orifice du réceptacle qui est *passif*, et non l'orifice de l'oviducte.

Les signes des sexes ont été adoptés lorsqu'on ne connaissait pas encore d'animaux à *trois* espèces d'orifices sexuels, comme les possède la *Branchiobdella.*

II. Mesobdella gemmata (*).

La *Mesobdella gemmata* est une Hirudinée terrestre qui se trouve au Chili.

Nous relevons seulement deux particularités de cet animal. Elles sont représentées dans les figures 3 et 4.

La figure 3 montre en *op* l'orifice d'une cavité qui débouche à la partie antérieure du corps, à l'intérieur de la circonférence la ventouse.

Nous n'avons pas encore pu découvrir si cette cavité, qui se retrouve symétriquement répétée de l'autre côté, est en relation avec un autre organe intérieur, ou bien si elle forme un cæcum.

La figure 4, à l'endroit *oi*, présente l'orifice d'une autre cavité. Celle-ci est *impaire* et située sur la ligne médiane, comme le montre la figure, qui contient dans la même coupe l'orifice anal (*oa*), avec le rectum et la chaine ganglionnaire (*cg*).

(*) Voir Dr Raph. Blanchard, *Bulletin de la Soc. zool. de France pour l'année 1893*, pp. 26-29 et pp. 108-109.

Cette cavité est assez spacieuse et possède une musculature propre, qui l'entoure de toutes parts.

Ici encore nos recherches n'ont pas décidé, jusqu'à présent, si la cavité communique avec d'autres parties du corps, ou si elle est close à l'intérieur.

La prévision de M. Raph. Blanchard s'est vérifiée: il avait trouvé, chez la *Xerobdella Lecomtei* (*), un orifice médio-ventral, situé près de la ventouse, et il soupçonnait la présence d'un orifice semblable chez la *Mesobdella gemmata*, toutes deux étant des Hirudinées terrestres.

M. le chanoine Delvigne lit un travail sur le pèlerinage de sainte Silvia aux saints lieux de Palestine. Silvia, selon toute probabilité, était une Gallo-Romaine de la fin du IV[e] siècle. Elle semble avoir appartenu à une communauté de dames pieuses, qu'elle désigne sous le nom de *sœurs* et de *nobles dames*. Sous le règne de Théodose le Grand, elle quitta les rives du Rhône, fleuve dont elle déclare le courant moins rapide que celui de l'Euphrate, et se dirigea directement, à ce que l'on peut supposer, sur Jérusalem. Descendue en cette ville, elle rayonna de là comme d'un centre, tantôt vers le Sinaï, tantôt vers la Terre de Gessen, tantôt vers la Mésopotamie, se rabattit sur Tarse, Constantinople, et peut-être Éphèse. Cet itinéraire, édité une première fois en 1884 par M. Gamurrini, signalé ensuite par M. le chanoine Jungmann (*Institutiones Patrologiae*, tome II), a été réimprimé avec plus de soin par le même érudit et a paru à Rome dans le tome IX des Mémoires de l'*Istituto di Storia e Diritto*. Ce journal de voyage de la pieuse et noble Aquitaine est encore incomplet; nous n'en possédons ni le commencement ni la fin. A la première page, nous nous trouvons avec la pieuse pèlerine au pied du Sinaï. M. Delvigne note les remarques géographiques que cette intéressante description suggère. Il va de soi qu'il s'interdit des développements sur les réflexions que

(*) RAPH. BLANCHARD, *Mémoires de la Soc. zool. de France pour l'année 1892*, p. 547.

font naître les établissements monastiques que Silvia rencontre partout en des lieux que les Écritures ont rendus illustres; il y a des moines au Sinaï, il y en a à l'Horeb. Il n'a fait qu'indiquer des témoignages que les historiens de la liturgie recueilleront avec plaisir et fruit. Mais il a dû rendre hautement hommage à la femme distinguée, devenue, sans avoir recherché cet honneur, l'un des pionniers de la science.

Le R. P. Van den Gheyn, S. J., rappelle, à propos de l'intéressante communication de M. le chanoine Delvigne, quelques-uns des travaux auxquels a donné lieu la découverte du journal de voyage de Silvia. Dans la *Revue des questions scientifiques* (*), notre regretté confrère M. Delgeur avait, dès 1886, mis à profit les données de la *Peregrinatio* pour confirmer les recherches de M. Naville relatives à la ville de Pithom, célèbre dans l'Exode des Hébreux.

Dans les *Bulletins* de l'Académie de Berlin, M. Mommsen fit ressortir, en 1887 (**), toute la valeur du curieux document que Silvia nous a laissé. En particulier, il y a trouvé la solution d'une difficulté qu'avait soulevée l'inscription trouvée par M. Naville à Tell el Maschuta. Dans cette inscription, on lit la phrase suivante :

AB ERO IN CLUSMA
M VIIII Θ

M. Naville, et après lui Delgeur (***) et M. Mommsen (iv), avaient pensé, comme il était naturel de le croire à première vue, que cette inscription mentionnait la distance totale qui séparait Clysma de Hero, à savoir 9 milles. Or, l'*Itinéraire* d'Antonin porte cette distance à 68 milles. En face de cette contradiction, Delgeur (v) inclinait à penser que l'un des deux textes était

---

(*) T. XIX, p. 58.
(**) *Jahrgang 1887*, pp 357-64.
(***) *Loc. cit.*, p. 57.
(iv) *Ephemeris epigraphica*, t. V, p. 12, n° 18; p. 570, n° 1327.
(v) *Loc. cit.*, p. 58.

manifestement dans l'erreur, et que l'*Itinéraire* devait être sacrifié, puisque les chiffres avaient pu aisément y être altérés. Pour MM. Naville (*) et Mommsen, la solution était dans cette conjecture qu'il y avait peut-être une seconde ville appelée Clysma, près d'Ismaïlia, sur les bords du lac Timsah.

Pourtant, M. Mommsen ne tarda pas à modifier ses idées sur ce point, et il émit la sagace hypothèse que, sur la pierre milliaire en question, se trouvait indiquée non pas la longueur totale du chemin qui va de Clysma à Hero, soit les 68 milles de l'*Itinéraire* d'Antonin, mais la distance à compter depuis l'endroit où était dressée cette borne jusqu'à Clysma, par quelqu'un qui venait de Hero, soit 9 milles (**).

Le récit de sainte Silvia a prêté à cette conjecture de M. Mommsen un nouvel appui, comme le fait remarquer M. Gamurrini (***). Ce récit maintient, en effet, les mesures de l'*Itinéraire* d'Antonin, quand il constate : *Sunt ergo a Clusma usque ad Arabiam civitatem mansiones quattuor* (IV), c'est-à-dire quatre étapes. Or, en évaluant chacune de ces étapes à 16 ou 17 milles, on arrive au compte établi par l'*Itinéraire*.

Au Congrès des Orientalistes tenu à Londres en 1891, M. Amélineau (V) a contredit l'identification de Heroopolis et de Pithom proposée par M. Naville. Il persiste, avec les savants de la Commission d'Égypte, à dire que Heroopolis est Ramsès. Le récit de Silvia distingue très nettement Heroopolis et Pithom. Mais, d'autre part, il sépare aussi Heroopolis et Ramsès. M. Amélineau n'a pas tenu compte de cette importante donnée, et il nous semble que les arguments étymologiques qu'il propose pour identifier Heroopolis et Ramsès sont peu convaincants.

Enfin, M. l'abbé Chabot a consacré une de ses thèses pour l'obtention du doctorat en théologie à l'Université de Louvain

(*) *The Store-City of Pithom*, p. 19.

(**) *Sitzungsberichte der königl. Preuss. Akad. der Wissenschaft*, 1887, p. 364.

(***) *Peregrinatio*, ed. alt., 1888, p. 15, not. 3.

(IV) *Ibid.*, p. 16.

(V) *On some Names of Egyptian Towns*, fasc. 11 du IXe Congrès international des Orientalistes, p. 16.

au récit de Silvia (*). Il y affirme que ce voyage ne fut pas effectué avant le VIe siècle ; ce sont des documents historiques, tirés surtout de la littérature syriaque, qui lui suggèrent cette manière de voir. M. Chabot n'ayant nulle part développé cette thèse, nous devons nous contenter de signaler son opinion, sans la discuter.

M. le Cte Ad. de Limburg-Stirum informe la troisième section que certaines expériences de culture par l'électricité dont il a été question l'an dernier, avaient déjà été faites antérieurement. En 1845 et avant cette époque, le Dr Forster (**), en Angleterre, avait employé un appareil analogue au géo-magnétifère dont on parle aujourd'hui. L'un et l'autre, en effet, se composent essentiellement de pointes destinées à capter l'électricité atmosphérique, et d'un réseau métallique pour la distribuer à la parcelle en expérience. Le réseau du Dr Forster est souterrain, car son auteur veut surtout agir sur les racines des plantes; bien plus, il cherche, dit l'article que nous résumons, à empêcher les pointes des feuilles d'orge de « soutirer l'électricité que les fils conducteurs doivent mettre en contact avec les racines ».

Quoi qu'il en soit, les expériences furent couronnées de succès, car la récolte d'orge et de trèfle « semblait, dit un fermier, venue sur un tas de fumier ». Nous ignorons complètement la suite de ces essais.

M. le Dr Henri Matagne lit la note suivante sur *la réviviscence des Rotifères :*

Recherchant un jour d'été, il y a quelques années déjà, des infusoires et des algues dans un vase dans lequel je cultivais le *Riccia fluitans* et le *Lemna gibba*, je mis sur le porte-objet du microscope une goutte du liquide recueilli au fond de ce vase, et j'eus la bonne fortune d'observer, pour la première fois, des

(*) Thèse LXV, pp. 17-18.
(**) *Journal d'horticulture pratique*. Édition belge, Bruxelles, Deprez-Parent, 1845, pp. 332-333.

Rotifères. Un faible grossissement suffit pour observer ces animaux si gracieux. On sait que ces petits vers sont célèbres dans la science à plus d'un titre. Ils sont pourvus au pôle caudal d'une ventouse, à l'aide de laquelle ils se fixent, mouvant leur corps en tous sens, s'allongeant, se rétractant; leur tête est munie d'une paire de couronnes ciliaires qui leur a valu leur nom ; ces couronnes en cils, qui, en vibrant sans cesse, donnent à l'œil l'illusion d'une roue, ne sont pas autre chose que les palpes bordant le gouffre qui doit engloutir leurs victimes. Mais ce qui a fait la fortune scientifique des Rotifères, c'est le fameux phénomène de la réviviscence. Je voulus profiter de l'occasion pour l'observer à l'aise. A cet effet, je laissai sécher le verre pendant huit jours, puis j'y ajoutai une goutte d'eau. Au bout de quelques minutes, je retrouvai dans le liquide des Rotifères, se mouvant d'abord avec lenteur, et peu à peu plus rapidement. Je recommençai plusieurs fois l'expérience en ajoutant de l'eau après un intervalle variant de deux jours à un mois. Ce qui m'a surtout frappé dans toutes ces observations, c'est de n'avoir jamais vu, parmi les animaux ressuscités, un Rotifère de grande taille. Ils étaient tous uniformément de même grandeur et aucun ne dépassait la taille des plus petits, ce qui me fit croire que les jeunes seuls pouvaient résister à la dessiccation.

J'avais remarqué également dans le liquide des corps d'un rouge foncé, de forme ovale, grands comme le cinquième d'un Rotifère. J'examinai ces corps après dessiccation et addition d'eau, et je vis que l'intérieur de quelques-uns d'entre eux, les plus foncés, était doué de mouvements de contraction et de rétraction. Ces mouvements augmentaient graduellement de force et de fréquence, et la membrane d'enveloppe finissait par crever, pour mettre en liberté un Rotifère bien constitué. Ces sortes de corps étaient assez nombreux, et j'ai pu observer quelques Rotifères qui en portaient un ou même deux dans le corps. En examinant avec attention ce corps ovale, qui peut évidemment être considéré comme un œuf, on y distingue parfaitement la forme du Rotifère, incurvé comme une larve dans son œuf ; les anneaux de la moitié postérieure du corps notamment sont très distincts.

Ce sont probablement ces œufs qui sont décrits sous le nom d'œufs d'été. J'ai essayé maintes fois de faire ressusciter un Rotifère déterminé en le plaçant, seul et isolé, au milieu du champ visuel du microscope; je fixais mon verre sur la platine et le laissais dessécher pendant une huitaine de jours; je mouillais alors le verre, mais jamais je n'ai réussi à produire la réviviscence, que l'animal fût petit ou grand.

On sait qu'il y a chez les Rotifères deux sortes d'œufs, les œufs d'été et les œufs d'hiver; ceux-ci sont beaucoup plus petits et coïncident avec l'apparition des mâles dont la vie est très éphémère et dont la taille est infiniment moindre que celle des femelles, ce qui avait fait croire à certains zoologistes que ces animaux devaient être classés parmi les Crustacés.

Les Rotifères ne seraient donc pas des animaux réviviscents; leur prétendue réviviscence se réduirait au phénomène non moins curieux de la parthénogénèse : leurs œufs non fécondés auraient la propriété de pouvoir résister à une dessiccation plus ou moins prolongée pendant laquelle ils accompliraient leur évolution jusqu'à maturité, n'attendant plus alors que la présence de l'eau pour briser leurs étreintes et nager librement.

Le R. P. Rousseau, S. J., adresse un mémoire intitulé : *Notes d'herborisation. Les plantes étrangères des environs de Louvain.* La section nomme rapporteurs, pour l'examen de ce mémoire, MM. l'abbé Alph. Meunier, professeur à l'Université de Louvain, et le D[r] Henri Matagne, à Bruxelles.

La section ayant reçu, du Bureau de la Société scientifique, notification de la dignité de comte romain héréditaire conférée à M. Domet de Vorges, ancien président de la Société et de la troisième section, s'associe aux félicitations dont le Bureau lui fera parvenir l'expression.

Le R. P. Van den Gheyn dit quelques mots de l'organisation du prochain Congrès des savants catholiques, qui se réunira à Bruxelles le 4 septembre, et fait appel au zèle des membres de la section.

Quatrième section.

Par suite d'un fâcheux contretemps, le malade que devait présenter M. le professeur Lefebvre et dont les symptômes rappellent ceux de la syringomyélie ou ceux de la lèpre, n'a pu se rendre à la réunion.

Néanmoins le sujet porté à l'ordre du jour a été traité par M. le Dr Glorieux, qui présente une malade atteinte du même mal. Le début de l'affection remonte à 27 ans (la malade en a 60) et se manifesta à la suite d'une grossesse. La jambe et le bras droits furent les premières parties atteintes. Plus tard, le côté gauche fut progressivement envahi à son tour. De la diminution des forces et des troubles de la sensibilité apparurent d'abord des deux côtés et s'accentuèrent peu à peu, avec cette particularité propre à la syringomyélie que la sensibilité ne fut pas atteinte au même degré dans toutes ses modalités. En un mot, elle fut dissociée. Ainsi, la malade se brûlait sans s'en apercevoir; elle eut plusieurs panaris qui lui enlevèrent quelques phalanges sans la faire souffrir. Et cependant la sensation du tact persistait. Elle est aujourd'hui abolie au bras, mais elle existe encore au membre inférieur en même temps que la sensibilité à la température. Les réflexes rotuliens sont conservés. Les paumes des mains sont atrophiées comme dans la lèpre.

M. le Dr Ghesquière a vu le malade que devait présenter M. Lefebvre et chez qui l'on peut vérifier aussi la dissociation des différentes modalités de la sensibilité : la sensibilité tactile est en effet conservée, tandis que la sensibilité à la température et à la douleur a disparu. Ce malade a perdu le bout de plusieurs doigts, et cette amputation spontanée ne s'est pas faite au niveau des articulations, mais au milieu des phalanges, par le creusement progressif d'un sillon qui ne laissait intact, pendant un certain temps, que les artères et les veines, qui constituaient ainsi une sorte de pédicule pour les extrémités digitales.

Le malade dont parle M. Ghesquière habite en aval de l'empla-

cement d'une grande léproserie qui existait à Namur, il y a plusieurs siècles.

N'est-ce pas le cas de considérer son mal comme une manifestation éloignée de la lèpre, d'après l'opinion du Dr Zambaco ? La bactériologie nous laisse perplexes en l'occurrence, car le bacille de la lèpre n'a été trouvé jusqu'ici que dans la forme tuberculeuse de la maladie.

On sait que Hansen est d'un avis contraire : l'atrophie palmaire que l'on observe dans la lèpre ne se rencontrerait pas dans la maladie de Morvan.

M. Huyberechts relate divers cas intéressants de sa pratique. Il s'agit d'abord d'une arthrite du genou, consécutive à une chute. L'inflammation se dissipa peu à peu et la guérison paraissait complète quand le malade perçut, à l'occasion de certains mouvements de flexion avec adduction, la sensation d'une secousse qui serait déterminée par une saillie des surfaces articulaires.

Notre collègue prévint son client du sort qui l'attendait : un corps étranger se trouverait bientôt libre dans l'articulation et donnerait lieu à des douleurs violentes caractéristiques. C'est en effet ce qui arriva. Mais le bistouri habilement conduit de M. Huyberechts extirpa le corps étranger, sans la moindre complication.

Puis vient la relation d'une suture de la rotule, faite avec succès, douze jours après la fracture. Un petit drain placé dans la plaie faillit compromettre le succès de l'intervention.

Notre confrère rapporte ensuite un cas de dilatation gastrique ou plutôt de catarrhe d'estomac occasionnant, à la suite de certains repas, des crises caractérisées par une forte élévation de température et des symptômes généraux graves. Une foule de traitements avaient échoué. Un régime sévère institué par M. Huyberechts ramena à son fonctionnement normal cet estomac surmené depuis longtemps.

Enfin un cas d'influenza avec embolies successives de la rate et du cerveau, et un cas de pneumonie qui semblait devoir être sévère, mais qui fut jugulée en deux jours, sont exposés par M. Huyberechts dans leurs détails les plus importants.

Le traitement de la fracture de la rotule par la suture avait amené notre collègue à préconiser l'emploi du massage dans les cas de ce genre. M. Verriest profite de l'occasion pour dire que le mode d'action du massage n'est pas encore complètement interprété. On admet généralement que si le sang veineux revient vers le cœur, chargé d'acide carbonique, c'est parce qu'il a subi au sein des tissus des échanges qui lui ont enlevé de l'oxygène et l'ont saturé d'acide carbonique. Ces modifications, dit M. Verriest, se conçoivent facilement quand on leur suppose comme siège un milieu tel que les masses musculaires.

Mais si l'on considère que le sang veineux revenant des extrémités des doigts, par exemple, c'est-à-dire de régions où il n'y a guère que des tendons, présente les mêmes caractères que celui des autres parties du corps, on est en droit de s'étonner de semblables résultats. Pour M. Verriest, il faut considérer l'endothélium des vaisseaux capillaires comme formé de cellules comparables à celles d'un tissu glandulaire, et le massage, en favorisant le cours du sang par la pression qu'il exerce sur ces vaisseaux, modifie ainsi les phénomènes nutritifs de la région où on le pratique. De là sa puissante efficacité dans tous les cas où il se trouve indiqué.

Cinquième section.

—

M. Éd. Van der Smissen, chargé de cours à l'Université de Liége, fait une communication sur *la théorie quantitative dans la théorie générale monétaire.*

Voici le résumé de cette intéressante communication.

« Parmi toutes les études qui ont pour objet les théories et les controverses relatives à la MONNAIE, l'étude de la théorie quantitative de la monnaie mériterait d'occuper, par son importance pratique, la première place. C'est, en effet, la connaissance de la théorie quantitative qui permet de saisir la relation des crises. A qui l'a bien comprise, il n'est plus besoin de démontrer que les modifications introduites dans le système monétaire

traditionnel sont l'une des causes principales de la crise économique : il sait que toute modification de ce genre, si elle est de nature à produire une variation sensible dans le pouvoir d'achat de la monnaie, doit se répercuter indéfiniment en apportant le trouble dans l'ensemble des transactions et des échanges.

Quelques données élémentaires seront rappelées ici utilement.

« La valeur d'échange de la monnaie se nomme le pouvoir de l'argent. La valeur des autres marchandises exprimée en argent est le prix. D'après cela, la valeur de la monnaie est en raison inverse de l'ensemble des prix; dire, en effet, que, par rapport à la monnaie, la valeur des choses est faible, cela signifie qu'il faut peu de monnaie pour les acquérir et, en pareil cas, la monnaie a un grand pouvoir; dire, au contraire, que la valeur des autres choses est élevée, implique que la monnaie a un faible pouvoir, puisqu'il faudra donner beaucoup de monnaie en échange.

» La hausse des prix correspond — d'après ceci — à une diminution dans le pouvoir du numéraire; la baisse des prix, à une augmentation de ce pouvoir (*). »

La théorie quantitative enseigne comment s'établit l'équivalence de telle quantité de monnaie et de telle quantité (poids, contenance) de denrées. En voici la formule : « La valeur (ou pouvoir d'achat) de la monnaie est en raison inverse de sa quantité, l'offre des marchandises restant la même. »

Le pouvoir d'achat de la monnaie, en effet, est sujet à des fluctuations. Sans doute, les changements qui sont perçus par le vulgaire, ce sont les changements de prix. C'est ainsi que le soleil paraît tourner autour de la terre : il n'en est rien pourtant. Lorsque le changement qui se manifeste dans les prix affecte la généralité des prix de tous les produits, *l'ensemble des prix*, c'est le pouvoir d'achat de la monnaie qui a subi une modification.

Les premières données de la théorie ainsi précisées, M. Van

(*) CAUWES, *Précis d'économie politique,* tome I, n° 202.

der Smissen aborde successivement ses différents aspects. Le travail présenté à la cinquième section ayant été publié *in extenso*, postérieurement à la réunion, dans la *Revue des questions scientifiques* (*), il suffira d'en indiquer ici très brièvement les lignes principales.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, M. Van der Smissen montre que la théorie quantitative de la monnaie n'est qu'un aspect spécial de la théorie de la valeur d'échange. De ce que « la valeur exprime le rapport des objets échangés (**) », et pour préciser *des quantités échangées*, il suit qu'une modification de la somme dont l'un des termes du rapport n'est qu'une fraction, la somme dont l'autre terme du rapport n'est aussi qu'une fraction restant la même, l'équation primitive n'existe plus. Selon que la masse du numéraire augmente ou diminue, la masse des produits restant la même, une même quantité de monnaie vaut une quantité moindre ou plus grande de produits.

Quant à la masse du numéraire dont la quantité agit sur les prix, c'est la masse totale du numéraire admis dans la circulation internationale. Le besoin de monnaie étant universel, il est naturel que le pouvoir d'achat de la monnaie, toutes choses étant égales, soit identique dans l'espèce. « De sa nature, dit M. Claudio Jannet, le marché de l'argent est universel », et cette unité du marché des métaux précieux a pour corollaire l'unité des prix pour les denrées dont le marché est universel. De ce que les prix sont internationaux, il suit que le numéraire sur la masse duquel se règlent les prix est la masse totale du numéraire admis dans la circulation internationale.

Mais la *loi des quantités et des prix* n'est pas l'expression d'une équation dont la masse du numéraire serait l'un des termes, l'autre terme étant l'ensemble des choses, la monnaie exceptée.

(*) REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, deuxième série, t. V, janvier 1894. *La question monétaire envisagée au point de vue théorique*, pp. 167 et suivantes : IV. Théorie quantitative de la monnaie.

(**) Stanley Jevons.

L'équation vraie serait plutôt la suivante : La masse du numéraire, multipliée par sa circulation en un temps donné, est égale à la fraction de la masse des choses qui circule dans le même temps.

Le point de départ de la théorie, à savoir que les prix s'établissent d'après la masse des moyens de les acquitter, ne fait l'objet d'aucun doute. L'objection que l'on oppose à ceux qui l'invoquent pour expliquer la crise, c'est que « la monnaie, en tant que moyen d'échange, tendrait à perdre de plus en plus son influence sur le prix des choses », et cela en raison du développement du crédit et de la multiplication des instruments de crédit, qui tiennent dans les transactions la place de la monnaie.

M. Van der Smissen n'est pas d'avis que l'objection soit décisive, la circulation de la monnaie ayant pour effet de terminer et d'accomplir les transactions, la circulation des titres de crédit ayant pour effet d'en différer le réglement. Il croit même que le développement du crédit est étroitement dépendant de la suffisance de l'instrument monétaire proprement dit. Il appuie cette manière de voir sur l'analyse du rôle des divers instruments de crédit dans l'échange.

Même pour les titres qui se rapprochent le plus du numéraire métallique, les billets de banque, il pense avec M. Foxwell que « c'est l'importance de la réserve métallique qui forme la limite dernière de l'émission des billets de banque. »

Il explique ensuite comment la démonétisation de l'argent, ou tout au moins le discrédit qui atteint la monnaie blanche, ayant raréfié l'instrument des échanges internationaux, la baisse des prix s'en est suivie et a déterminé la crise commerciale, industrielle et agricole par la réduction de plus en plus forte des profits dans les entreprises de toute sorte.

Rappelant que la stabilité des prix doit être l'objectif d'un système monétaire rationnel, M. Van der Smissen termine sa communication en montrant que cette stabilité suppose l'accroissement continu du stock monétaire à cause de l'augmentation de la population, de la production et des échanges. L'affluence monétaire à la suite d'une extraction de minerai plus forte, se

corrige d'ailleurs par les effets normaux de cette affluence, l'élan donné aux affaires, les entreprises nouvelles, etc. La pénurie monétaire, au contraire, s'aggrave par la pénurie même; son effet, qui est de resserrer les affaires, ne permet point pour cela de se passer de numéraire ; au contraire, l'atteinte portée au crédit rend les payements en numéraire plus nécessaires et plus nombreux.

En concluant, M. Van der Smissen fait remarquer que la crise économique se prolonge au delà de toutes les prévisions et dans des conditions inexplicables, si l'on méconnaît l'importance du facteur monétaire. Au contraire, si son influence est reconnue, les événements s'expliquent, et même on a pu les prédire et on les prédit en effet. Ce qui vaut mieux, on peut appliquer le vrai remède au mal, parce que le diagnostic est établi avec certitude. (*Applaudissements.*)

Après un échange d'observations auxquelles prennent part Mgr S. Nicotra, auditeur de la Nonciature et président de la section, M. Julin, secrétaire, et M. Éd. Van der Smissen, il est décidé que la discussion de la communication de M. Van der Smissen aura lieu lors de la prochaine réunion de la section, qui se tiendra à Bruxelles en avril prochain.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE.

M. Maurice Lefebvre, docteur en sciences naturelles, professeur au collège de Virton, fait une conférence sur *La Lèpre*, dont voici le résumé (*).

La lèpre est une des maladies les plus anciennement connues. Les Livres de Moïse nous apprennent que le peuple hébreu,

(*) La conférence sera publiée *in extenso* dans la *Revue des questions scientifiques.*

1500 ans avant J.-C., en avait pris l'infection en Égypte. On considère communément l'Égypte comme le berceau de cette maladie, que les Phéniciens transportèrent ensuite, dans leurs navigations hardies, jusqu'aux plus lointains rivages. Plus tard, les Juifs, dont la race se dispersa sous la malédiction divine sur la terre entière, la répandirent sur les chemins de leurs nombreux exils. Dans la suite des temps, les guerres d'Alexandre le Grand, les expéditions de Pompée, les conquêtes des Arabes, les croisades, favorisèrent à leur tour la propagation du mal. On ignore le mode d'introduction de la lèpre dans le Nouveau-Monde, les uns l'attribuant aux Chinois, d'autres aux navigateurs norwégiens, d'autres encore à la traite des noirs. De notre temps enfin, le fléau envahit l'Océanie, où ses progrès s'accusent dans certaines îles avec une effrayante intensité. Il semble d'ailleurs que certains pays lui offrent un terrain spécialement favorable, et ce sont surtout les pays marins.

La lèpre est une maladie d'origine nerveuse, mais dont les principaux accidents retentissent surtout à la peau et aux organes extérieurs. Les médecins en définissent la nature en disant que c'est une *névrite périphérique*, c'est-à-dire que ses lésions atteignent originairement, non les centres nerveux, mais les nerfs eux-mêmes à une certaine distance de l'axe cérébro-spinal. Ces lésions du système nerveux expliquent les accidents lépreux extérieurs : l'atrophie des nerfs sensibles amène l'anesthésie, celle des nerfs trophiques produit les désordres de la nutrition des tissus : néoplasies, ulcères, nécroses, résorptions...; celle des nerfs moteurs engendre la paralysie des muscles du mouvement volontaire avec les déformations des extrémités.

Suivant les symptômes du mal, on divise la lèpre en deux variétés principales : la lèpre tuberculeuse, caractérisée surtout par la formation de nodosités à la face et aux extrémités, nodosités suivies d'ulcérations ; et la lèpre anesthésique, dans laquelle les tubercules n'apparaissent pas. Dans les deux variétés, mais surtout dans la dernière, on observe de hideuses déformations, des nécroses, des résorptions, des amputations spontanées de portions importantes des mains et des pieds.

L'issue de la maladie est fatale : soit que le mal finisse par attaquer les organes essentiels, soit que l'affaiblissement du malade aboutisse à un marasme mortel, soit que quelque maladie étrangère vienne se greffer, comme cela arrive très souvent, sur la lèpre elle-même et tue le malade avant les derniers accidents lépreux.

Un médecin de Constantinople, bien connu par ses études sur la lèpre, Zambaco-Pacha, a émis récemment une théorie qui a suscité un grand intérêt dans le monde médical. Pour lui, certaines maladies d'origine nerveuse, la maladie de Morvan et la syringomyélie entre autres, ne sont que des formes atténuées de la lèpre, et il en faudrait conclure que la lèpre n'a pas, comme on le pense, entièrement disparu de nos régions, mais que ses symptômes s'y sont modifiés, affaiblis, depuis les temps anciens.

Fort séduisantes à première vue, les idées de synthèse de Zambaco-Pacha sont appuyées par de nombreux partisans; mais il faut avouer qu'elles rencontrent de très graves objections et que l'on est fondé à demander ses preuves à une thèse aussi hardie avant de lui donner droit de cité dans la science. Aussi, les adversaires des théories de Zambaco-Pacha ne se déclareront-ils convaincus que le jour où celui-ci pourra montrer, dans un cas de syringomyélie ou de maladie de Morvan, le microbe spécifique de la lèpre.

La lèpre est, en effet, une maladie microbique. Toutes les observations le faisaient admettre depuis longtemps, lorsque le médecin norwégien Hansen, en 1874, découvrit le microbe soupçonné. Le *Bacillus leprae* est un petit bâtonnet long de 3 à 7 μ, et épais d'un demi μ, très ressemblant au *Bacillus tuberculosis*.

La découverte de Hansen, devenue le sujet d'étude de tous les léprologues, avait inspiré d'abord quelque espoir de faire découvrir le remède à la lèpre. Mais, jusqu'à présent, rien n'est venu confirmer cet espoir, et malgré les recherches multipliées, la thérapeutique de la lèpre en est encore réduite à tâtonner dans un dédale de traitements et un chaos de médicaments incertains.

La lèpre est-elle incurable? Tout porte à le croire, et si des

arrêts de la maladie viennent parfois rendre une lueur d'espoir aux malades et aux médecins, les uns et les autres ne l'accueillent qu'avec une triste défiance : ils savent trop bien que la lèpre est capricieuse et que les interruptions du mal, qui parfois peuvent durer des années, ne sont le plus souvent que des temps de répit.

Les spécialistes ne sont pas d'accord sur la question de la contagiosité de la lèpre : les uns, comme Danielsen, Zambaco-Pacha, nient la contagiosité ; d'autres, comme Hansen, Hébra, Schilling, Neisser, Leloir, et le plus grand nombre, l'affirment ; d'autres enfin, comme Virchow et Boeck, hésitent à se prononcer. On a inutilement cherché à décider la question par l'expérimentation : des inoculations de virus lépreux, tentées sur l'homme lui-même à plusieurs reprises, n'ont donné que des résultats douteux.

Autre est la question de l'hérédité, que la plupart des médecins résolvent par l'affirmative.

La contagiosité et l'hérédité ont été toutes deux acceptées dans tous les temps qui ont précédé le nôtre, et c'est pour les combattre que la séquestration des lépreux a été en tous pays et en tout temps pratiquée, parfois avec rigueur. Il n'y a pas de doute que c'est à cette mesure que nos pays doivent aujourd'hui leur immunité de l'infection lépreuse.

C'est d'ailleurs une douloureuse histoire que celle de cette séquestration, qui a fait des lépreux, partout où l'Église ne leur apportait pas ses consolations, des parias voués au désespoir. C'est ainsi qu'en Chine, au Japon, en Sibérie, les infortunés lépreux sont impitoyablement chassés des villes et des villages et condamnés à une mort inévitable.

A côté de ces tristes tableaux, on est heureux de montrer les œuvres que la pitié et la charité chrétiennes ont su réaliser pour secourir les lépreux. La dernière en date, et celle qui a suscité dans les derniers mois le plus vif intérêt, est la mission du Dr Sauton.

Le Dr Sauton est un médecin qui s'est fait moine, qui est devenu prêtre, et qui se fait aujourd'hui missionnaire des

lépreux. Approuvé par les autorités ecclésiastiques, encouragé par les maîtres de la science, appuyé par une mission scientifique du gouvernement français, il est parti pour aller explorer divers pays à lèpre : la Norvège, la Finlande, la Turquie, la Grèce, l'Égypte; il veut instituer, au cours de ses voyages, une méthode rationnelle de recherches, dirigées par l'observation et l'expérimentation, en vue de découvrir l'introuvable remède du fléau.

Le Dr Sauton ne part pas seul : son frère, prêtre comme lui, l'accompagnera pour l'aider dans ses travaux scientifiques, pour partager ses labeurs et adjoindre au sien son zèle sacerdotal. Car, on le comprend, ce n'est point une mission purement médicale que les deux frères entreprennent, et si la Providence ne leur accorde pas la gloire et la joie de trouver le remède à la lèpre, elle ne pourra leur refuser la joie plus profonde et la gloire plus divine de sauver pour le ciel des infortunés qu'ils n'auraient pu guérir sur la terre.

Après avoir parcouru les pays lépreux que nous avons nommés, les deux frères n'auront encore accompli que la première partie de leur mission : ils en termineront la dernière étape à Molokaï, dans les îles Sandwich ; c'est là, au centre du plus terrible foyer de lèpre qui soit de nos jours, qu'ils veulent porter le fruit de leurs études et appliquer les traitements que les observations recueillies au cours de leurs voyages leur auront inspirés.

C'est là, près du tombeau du Père Damien, dont ils auront suivi les traces glorieuses, qu'ils consommeront sans doute le sacrifice de leur vie, offerte à Dieu par amour pour leurs frères.

Après cette conférence, l'assemblée reprend la discussion de la *question de l'enseignement des sciences naturelles* dans les établissements d'instruction moyenne. Voici un résumé de cette discussion :

M. Proost, inspecteur général de l'agriculture. — Lors de la dernière discussion sur l'enseignement des sciences naturelles dans les collèges, mes adversaires m'ont opposé des arguments dits d'autorité. Je ferai comme eux.

Voici d'abord M. Godefroid, inspecteur général de l'enseignement libre en France, qui constate avec moi qu'on exerce la mémoire des enfants au détriment des autres facultés, du « jugement », par exemple, et qu'on ne fait pas suffisamment la part des exigences de l'hygiène.

« M. Proost, dit-il, appelle avec raison l'attention des pédagogues chrétiens sur un terrain dont ils se tenaient éloignés jusqu'ici avec une répugnance invétérée » (*Lettres chrétiennes*, t. V, 1882, mai-juin).

Un autre témoignage en faveur de ma thèse est celui de M. l'abbé David, membre de l'Institut, que rapporte, en l'appuyant de son autorité, M. Garnier.

On sait qu'en Chine l'éducation se limite au cercle étroit du passé, et que les programmes d'enseignement ne tiennent guère compte des progrès modernes.

« Nous nous comportons comme les Chinois, dans nos pays de race latine, dit M. David. Nos pédagogues n'ont pas vu ou n'ont pas voulu voir, en France, les transformations qui s'opéraient autour de nous quant aux méthodes d'enseignement. Nous sommes restés immobiles, inactifs, stationnaires, alors que tout marchait, que tout progressait autour de nous. »

Si la médecine et l'agriculture, pour ne citer que ces deux sciences, sortent actuellement de leurs langes, c'est grâce aux découvertes réalisées depuis un siècle par les sciences naturelles. Il n'en est pas de même de la pédagogie, qui persiste à méconnaître jusqu'ici les lois qui président au développement parallèle des facultés physiques et morales.

En 1876, je développai pour la première fois à la tribune de la Société (*), et plus tard (1882) dans la *Revue des questions scientifiques*, cette thèse qui a été reprise par plusieurs philosophes, notamment par M. Payot. Ce dernier revient notamment sur l'ignorance des anciens pédagogues en ce qui concerne la formation de la volonté.

(*) *Annales*, session d'avril, assemblée générale, t. I, 1re partie, p. 120.

« L'expérience et l'observation ne prouvent-elles pas que les facultés sont des produits de développement? écrivais-je en 1881 dans le journal *La Paix*. On naît avec des aptitudes plus ou moins prononcées; mais ces dispositions avortent ou se développent en raison de l'*exercice* et des conditions physiques qui président à la santé du cerveau et des autres organes.

» La volonté, comme les autres facultés, est fonction de l'*exercice* et de la *santé*. Il ne suffit pas de vouloir pour pouvoir, en dépit du proverbe. Ainsi, les caractères faibles veulent parfois très énergiquement sous l'impulsion du sentiment, de la crainte ou de l'amour. Mais la mobilité de leurs impressions, le défaut d'esprit de suite stérilisent d'ordinaire leurs résolutions. Ce sont des êtres passifs dont la réceptivité stérilise les bons propos. Le caractère n'est en vérité que l'expression de la force de *réaction mentale* contre les impulsions naturelles ou morbides. »

« La liberté morale, dit M. Payot, comme la liberté politique, doit être conquise de haute lutte et sans cesse défendue; elle est la récompense des forts et des persévérants. Nul n'est libre que s'il mérite d'être libre. »

M. Mansion. — Je suis d'accord avec M. Proost sur la partie générale de sa thèse, savoir que l'on doit tenir compte des lois biologiques plus qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, dans l'éducation des enfants et des adolescents.

Mais quelles conclusions précises peut-on tirer de cette thèse générale pour transformer nos programmes d'enseignement?

Veut-on supprimer les humanités? Je ne le pense pas. Veut-on introduire les sciences naturelles dans les humanités, sans en rien retrancher? Dans ce cas, il faudra augmenter le nombre d'années d'études, ou bien on ira à l'encontre du but poursuivi par M. Proost, on surmènera les enfants plus encore qu'on ne le fait à présent.

Si l'on augmente le nombre des années d'études, pourquoi ne pas admettre le système que j'ai proposé : créer dans les collèges, après la rhétorique, une classe préparatoire à l'Université, classe consacrée principalement aux sciences naturelles?

Dans le système contraire, qui est appliqué en Allemagne, les

sciences physiques et les sciences naturelles sont enseignées de la sixième à la rhétorique, parallèlement à l'enseignement des langues et des mathématiques élémentaires. Mais cet enseignement est fatalement superficiel, car les sciences naturelles — qui ont été constituées comme sciences relativement tard — sont plus difficiles à étudier qu'elles n'en ont l'air; le plus souvent, cet enseignement consiste en exercices de mémoire qui ne développent guère l'intelligence; enfin, il nuit à l'enseignement littéraire. L'intelligence des élèves est sollicitée dans trop de sens divers. On ne peut avoir deux amours à la fois : on ne peut se donner tout entier simultanément à la littérature et aux sciences.

M. Thiébauld ne partage pas l'opinion de M. Mansion.

Le système de bifurcation des études ne produit pas les effets que l'on en attendait par la raison que l'on détermine les bons élèves à suivre les classes latines, et que les étudiants médiocres s'adonnent plutôt aux études professionnelles. On abandonne souvent les classes professionnelles à elles-mêmes, tandis qu'on accorde des soins tout particuliers aux autres.

Une réforme des méthodes d'enseignement s'impose. Les programmes doivent être mis en harmonie avec les nécessités actuelles de l'existence. Nos rhétoriciens entrent dans la vie avec un bagage de connaissances surannées, presque sans utilité dans l'âpre lutte économique qui caractérise le XIXe siècle. C'est comme si l'on mettait entre les mains de nos soldats les vieilles armures du moyen âge, pour combattre un ennemi muni des armes modernes les plus perfectionnées. La question a une haute portée sociale.

Qu'on diminue la trop grande importance accordée aux langues mortes; qu'on y adjoigne l'étude des langues vivantes, si éminemment utiles et qui, bien enseignées, élèvent l'intelligence du jeune homme et lui ouvrent des horizons nouveaux. Les mathématiques fortifient le jugement. Les sciences naturelles développent les facultés d'observation. La connaissance de la physique et de la chimie n'est-elle pas devenue également indispensable? Qu'on fasse, dans les humanités, une large place aux sciences en restreignant le nombre d'années consacrées aux études latines.

Je partage les idées de M. Proost. On doit rendre les études plus sérieuses, plus pratiques, plus scientifiques; et dès lors les universités formeront moins de déclassés.

M. Mansion. — L'enseignement supérieur forme un grand nombre de déclassés parce qu'en Belgique tout examen d'entrée à l'Université est supprimé depuis 1876, pour les futurs médecins, pharmaciens, avocats et notaires. Le nombre des étudiants des facultés a monté de 41 à 82 par 100,000 habitants pendant les dix années qui ont suivi la suppression de cet examen. Au contraire, l'examen d'entrée a été maintenu pour les écoles spéciales; aussi le nombre des aspirants ingénieurs est resté à peu près stationnaire pendant la même période, 15 par 100,000 habitants. S'il y a eu encombrement dans les universités belges, si elles versent chaque année dans la nation quelques centaines de déclassés, c'est donc à la suppression de l'examen d'entrée qu'il faut s'en prendre. Rien ne peut d'ailleurs suppléer à cet examen : tout le monde sait que le certificat d'humanités complètes, exigé par la loi de 1890, n'a pas grande efficacité.

Quant aux idées de M. Thiébauld sur les humanités, je ne les partage nullement. Selon moi, on n'enseigne pas aux élèves des collèges le latin et le grec pour leur faire lire, écrire ou parler ces deux langues, mais pour développer leurs facultés, pour leur apprendre à analyser la pensée d'autrui et à exprimer leur propre pensée dans leur langue maternelle.

Les humanités ainsi comprises constituent une gymnastique intellectuelle qui exerce toutes les facultés des jeunes gens. Tous ceux qui ont élevé l'édifice des sciences modernes, depuis Galilée jusqu'à Pasteur, se sont préparés à cette noble tâche en consacrant leur adolescence à des études surtout littéraires; ce n'est que plus tard qu'ils ont abordé les études scientifiques.

Peut-on diminuer le temps consacré actuellement dans nos collèges à l'étude du grec et du latin, sans craindre d'enlever à ces langues leur valeur éducatrice? Pour ma part, je ne le pense pas et, en tout cas, l'expérience n'a pas été faite.

Pourquoi n'essaierait-on pas, pour les sciences naturelles, ce qu'on fait, avec succès, pour les parties les plus difficiles des

mathématiques élémentaires : les enseigner après la rhétorique? On a constaté que les élèves qui, leurs humanités terminées, faisaient une première scientifique pour se préparer aux écoles spéciales, réussissaient très bien dans leurs études ultérieures.

Qu'on fasse la même chose pour les sciences naturelles, au lieu de bouleverser à la légère l'enseignement classique. Qu'il y ait une première de sciences naturelles, et le résultat sera excellent.

M. Proost. — J'ai répondu déjà dans mes précédents articles à la plupart de ces objections (*) ; nous y reviendrons d'ailleurs. Nous ne pouvons discuter, en une heure, une question aussi complexe que celle qui nous occupe et qui a rapport à l'enseignement primaire, moyen et supérieur, à l'éducation physique, intellectuelle et morale, à l'enseignement des langues mortes et des langues vivantes, à l'introduction des sciences naturelles dans l'enseignement.

Je propose le renvoi de cette discussion à la prochaine session. Il ne faut pas que cette question, d'une si haute importance, soit étranglée.

M. Mansion. — Nous ne pouvons pas procéder à un vote sur la question.

M. Proost. — Je ne demande pas qu'on passe au vote, mais que la question soit discutée à fond.

M. Mansion. — Quant à espérer qu'on se convaincra mutuellement, non!

M. Proost. — Je reviens sur la question que je posais en commençant : Importe-t-il, oui ou non, de faire entrer la pédagogie dans une phase rationnelle et scientifique en se basant sur les révélations de la biologie?

M. Mansion. — On est sorti de la phase empirique au moins depuis deux siècles pour l'enseignement des langues synthétiques anciennes, et depuis cent ans pour les mathématiques.

On dit trop facilement que les mathématiques ne peuvent être comprises par de jeunes intelligences; les écoles moyennes offi-

---

(*) Voir notamment *L'Hérédité et l'éducation*, dans la Revue des questions scientifiques, 1882, t. XI, pp. 528 et suiv

cielles démentent cette affirmation. On y enseigne les mathématiques avec succès, et on y obtient des résultats que beaucoup ne soupçonnent pas. On peut constater la même chose chez les Frères des Écoles chrétiennes, qui enseignent très bien aussi les mathématiques.

Quant aux sciences naturelles, le plus souvent, aujourd'hui, dans les classes inférieures, leur enseignement développe chez les élèves la mémoire et non l'esprit d'observation. Si l'on veut vivifier cet enseignement par les promenades scolaires, elles prendront beaucoup de temps. Et encore ne seront-elles fructueuses, au point de vue de l'étude des sciences naturelles, que si elles sont dirigées par des professeurs vraiment intelligents, doués d'un grand esprit d'observation et sachant tirer parti, au profit de leur enseignement, de toutes les circonstances fortuites qui peuvent se présenter pendant une excursion à la campagne.

M. Proost. — J'ai constaté plus d'une fois que des enfants qui avaient un profond dégoût pour l'étude, dont l'attention ne pouvait être fixée et qui manquaient absolument d'esprit de suite, j'ai constaté que, si on parvenait à les intéresser aux sciences naturelles, ils prenaient souvent goût à l'étude et devenaient de bons sujets.

M. Mansion. — Avec de bons professeurs!

M. Proost. — Un professeur ordinaire peut éveiller la curiosité d'un enfant inattentif, il peut l'intéresser aux classifications, aux exercices d'intuition et finir par lui faire aimer l'étude.

Je le répète, j'ai vu des élèves indociles, indisciplinés, rebelles à l'enseignement, se transformer complètement, grâce à la méthode d'enseignement que je préconise.

Plusieurs d'entre eux ont fait des études supérieures avec le plus grand succès, alors que longtemps leurs parents avaient complètement désespéré de les voir poursuivre leurs études.

Je parlais tout à l'heure de la volonté: que de jeunes gens, qui ont reçu une éducation profondément chrétienne dans leur famille d'abord, au collège ensuite, se conduisent d'une façon désordonnée quand ils sont livrés à eux-mêmes. Combien roulent avec désespoir sur la pente du vice, parfois même du crime,

parce que l'élément passionnel, l'imagination, l'emporte chez eux sur la réflexion et sur la *volonté* ; tandis que nous voyons d'autres jeunes gens, parfois sans principes, fournir une carrière utile et se maîtriser, parce qu'ils ont acquis de bonne heure des notions positives sur la vie et subi le joug d'une discipline sévère qui a développé leur puissance de réaction mentale.

On cultive également d'une façon anormale la mémoire et l'imagination dans nos collèges, au détriment de la réflexion. C'est l'avis du Conseil de perfectionnement et d'un grand nombre de prêtres expérimentés.

Le sentiment, l'amour, le dévouement ne suffisent pas plus pour former des hommes *complets* que les règles d'une pédagogie surannée, dédaigneuse de l'observation, qui se complaît dans l'ignorance des lois naturelles, parce qu'elle procède d'aphorismes et d'affirmations *à priori*. C'est ce que je crois avoir mis en lumière, notamment dans ma conférence du mois d'avril.

Je le répète, une modification au programme et aux méthodes d'enseignement s'impose.

M. Mansion. — Oui, mais enseigner les sciences naturelles pendant les humanités, ce serait aggraver le surmenage dont on se plaint déjà.

M. Proost. — Il faut faire place aux nouvelles branches d'enseignement reconnues nécessaires en en élaguant d'autres.

J'ai déjà dit notamment qu'on pourrait apprendre plus de latin en moins de temps par une autre méthode.

M. Degive. — Ce n'est pas sans étonnement que j'ai entendu M. Mansion émettre cette opinion, que l'*étude des sciences naturelles* est plutôt de nature à contrarier qu'à favoriser l'instruction et l'éducation de la jeunesse.

Me réservant de combattre cette manière de voir avec tous les développements que la chose comporte, je ne puis m'empêcher de déclarer immédiatement à quel point je la trouve erronée et en contradiction avec l'ordre naturel des choses. Ma conviction est que le système défendu par M. Proost est le seul bon, le seul conforme à la nature et à l'évolution normale de l'être humain.

J'estime que l'instruction primaire et l'enseignement secon-

daire doivent avoir pour objet essentiel d'initier les jeunes intelligences à effectuer d'une manière méthodique et de plus en plus approfondie ce qu'elles font spontanément et naturellement dans la première enfance : observer, analyser, interpréter les choses et les phénomènes extérieurs.

C'est en regardant, en palpant, en écoutant, en respirant, en goûtant, en pesant et en mouvant les choses, c'est-à-dire par le moyen de l'observation et de l'expérimentation extérieures, que l'enfant éveille son intelligence et arrive à concevoir les *idées* exprimées ou traduites par ces *choses*.

Si c'est dans les *choses*, dans les *phénomènes naturels* que l'enfant puise ses premières idées, si c'est par ces *choses* et par ces *faits* qu'il apprend à *juger*, autrement dit à *penser*, n'est-il pas élémentaire que le développement ultérieur, que le perfectionnement de son esprit ne pourrait se faire d'une manière plus efficace par un autre procédé?

Or, qu'est-ce que l'observation et l'expérimentation appliquées aux choses extérieures, sinon l'étude des êtres et des phénomènes qui constituent l'objet des sciences naturelles ?

La culture de ces dernières me paraît constituer le seul moyen capable de former des intelligences claires, des jugements solides et des caractères droits.

Cette étude des sciences naturelles devrait nécessairement marcher parallèlement avec celle des langues et des mathématiques, qui servent à traduire les idées exprimées par les choses.

S'il existe des pays où un pareil système a été employé sans succès, on peut être assuré qu'il a été mal entendu et défectueusement appliqué. Afin de l'établir, je veux bien m'engager à produire le programme réclamé par M. Mansion pour servir de base à une discussion plus approfondie de cette question de première importance.

M. Mansion fait ses réserves sur certaines opinions qui viennent de lui être attribuées.

La discussion est renvoyée au mois d'avril, où on lui consacrera une séance tout entière.

SESSION DES 3, 4 ET 5 AVRIL 1894

A BRUXELLES.

SÉANCES DES SECTIONS

Première section.

Mardi, 3 avril 1893. — M. d'Ocagne communique à la section la démonstration des formules relatives à la *composition des lois d'erreurs de situation d'un point* dans un plan, qu'il a publiées récemment dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris* (t. CXVIII, pp. 517-519, 5 mars 1894), sans développer les calculs qui l'ont conduit à ces résultats.

Le travail de M. d'Ocagne sera publié dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de M. Jordan. En voici le résumé :

« Soit p_1 la probabilité pour qu'une certaine cause d'erreurs, agissant isolément, produise dans la situation d'un point l'écart (x_1, y_1), c'est-à-dire fasse tomber ce point à l'intérieur du petit rectangle limité d'une part aux abscisses x_1 et $x_1 + dx_1$, de l'autre aux coordonnées y_1 et $y_1 + dy_1$. Cette probabilité p_1 a pour expression

$$p_1 = \frac{g_1}{\pi} e^{-(\alpha_1 x_1^2 + 2\beta_1 x_1 y_1 + \gamma_1 y_1^2)} dx_1 dy_1$$

où

$$g_1^2 = \alpha_1 \gamma_1 - \beta_1^2 = \delta_1.$$

Une autre cause, agissant isolément, donnera de même, pour l'écart (x_2, y_2) dans la situation du point, la probabilité

$$p_2 = \frac{g_2}{\pi} e^{-(\alpha_2 x_2^2 + 2\beta_2 x_2 y_2 + \gamma_2 y_2^2)} dx_2 dy_2$$

où

$$g_2^2 = \alpha_2\gamma_2 - \beta_2^2 = \delta_2.$$

La probabilité pour que ces deux écarts se produisent simultanément est égale à $p_1\,p_2$, et l'écart (x, y) du point est tel alors que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Donc, la probabilité totale pour que le concours des deux causes d'erreurs fasse naître l'écart (x, y) est la somme de toutes les probabilités élémentaires telles que celle qui vient d'être définie, lorsque x_1, x_2, y_1, y_2 prennent tous les systèmes de valeurs, de $-\infty$ à ∞, pour lesquels on a $x_1 + x_2 = x$ et $y_1 + y_2 = y$.

Représentant par φ_1 et φ_2 les formes quadratiques qui entrent dans les expressions de p_1 et de p_2, nous exprimerons cette somme par la notation

$$(1)\ \ldots\ p = \frac{g_1 g_2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\varphi_1+\varphi_2)}\,dx_1 dx_2 dy_1 dy_2,$$

$$(x_1 + x_2 = x\,;\ y_1 + y_2 = y).$$

Pour effectuer cette intégrale, considérons, en posant

$$F(u_1, u_2) = a_1u_1^2 + 2bu_1u_2 + a_2u_2^2 + 2c_1u_1 + 2c_2u_2 + d,$$

l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-F(u_1, u_2)}\,du_1 du_2,$$

$$(u_1 + u_2 = t).$$

On voit bien aisément que si l'on prend u_1 et u_2 pour coordonnées X et Y et que l'on considère la surface S, dont l'équation est

$$z = e^{-F(u_1, u_2)},$$

l'intégrale I représente le volume de la tranche infiniment mince déterminée entre le plan des u_1u_2 et la surface S par les plans P et P′ dont les équations sont

$$u_1 + u_2 = t \qquad \text{et} \qquad u_1 + u_2 = t + dt.$$

Soit σ l'aire comprise, sur le plan P, entre la surface S et le plan des $u_1 u_2$. On aura, en remarquant que l'écartement normal des plans P et P' est égal à $\frac{dt}{\sqrt{2}}$,

$$I = \frac{\sigma dt}{\sqrt{2}}.$$

Pour obtenir σ, on n'a qu'à former l'équation de la section de la surface S par le plan P, rapportée à la trace de ce plan sur celui des $u_1 u_2$, prise pour axe des u, et à sa trace sur le bissecteur des plans u_1OZ et u_2OZ, prise pour axe des z. On trouve, pour cette équation,

$$z = e^{-F\left(\frac{u\sqrt{2}+t}{2},\ \frac{-u\sqrt{2}+t}{2}\right)} = e^{-(lu^2-2mu+n)}.$$

Il vient, dès lors,

$$\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(lu^2+2mu+n)}\, du$$

$$= e^{-\frac{nl-m^2}{l}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(u\sqrt{l}+\frac{m}{\sqrt{l}}\right)^2} du = e^{-\frac{nl-m^2}{l}} \sqrt{\frac{\pi}{l}}.$$

Remplaçant l, m, n par leurs valeurs en fonction des coefficients de F, et portant cette valeur de σ dans l'expression de I, on trouve, après des calculs qui sont supprimés,

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{a_1 - 2b + a_2}}\, e^{-\frac{(a_1a_2-b)t^2+2[a_1c_2+a_2c_1-b(c_1+c_2)]t+d(a_1-2b+a_2)\quad (c_1-c_2)^2}{a_1-2b+a_2}} dt.$$

Appliquant cette formule au calcul de l'expression (1) de p, en effectuant l'intégration d'abord par rapport à x_1 et x_2, puis par rapport à y_1 et y_2, on trouve, finalement,

$$p = \frac{g}{\pi} e^{-(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2)}\, dx dy,$$

formule dans laquelle, en posant

$$D = (\alpha_1 + \alpha_2)(\gamma_1 + \gamma_2) - (\beta_1 + \beta_2)^2,$$

on a

$$\alpha = \frac{\delta_2\alpha_1 + \delta_1\alpha_2}{D}, \quad \beta = \frac{\delta_2\beta_1 + \delta_1\beta_2}{D}, \quad \gamma = \frac{\delta_2\gamma_1 + \delta_1\gamma_2}{D},$$

$$g^2 = \frac{\delta_1\delta_2}{D}.$$

Si l'on pose encore

$$\delta = \alpha\gamma - \beta^2,$$

on vérifie que l'on a bien, comme cela devait être,

$$g^2 = \delta.$$

Pour effectuer la composition de n lois d'erreurs, il suffit d'observer qu'en remplaçant, dans les expressions de α, β et γ, le dénominateur D par sa valeur

$$D = \frac{\delta_1\delta_2}{\delta},$$

On a

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha_1}{\delta_1} + \frac{\alpha_2}{\delta_2}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \frac{\beta_1}{\delta_1} + \frac{\beta_2}{\delta_2}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma_1}{\delta_1} + \frac{\gamma_2}{\delta_2}.$$

Il découle immédiatement de là que la loi résultante, dans le cas de n causes d'erreurs, est encore de même forme et qu'on a

$$\frac{\alpha}{\delta} = \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\delta_i}, \quad \frac{\beta}{\delta} = \sum_1^n \frac{\beta_i}{\delta_i}, \quad \frac{\gamma}{\delta} = \sum_1^n \frac{\gamma_i}{\delta_i}.$$

Pour tirer de là α, β, γ, posons

$$\sum_1^n \frac{\alpha_i}{\gamma_i} = A, \quad \sum_1^n \frac{\beta_i}{\delta_i} = B, \quad \sum_1^n \frac{\gamma_i}{\delta_i} = C,$$

$$AC - B^2 = \Delta.$$

Nous avons alors

$$\alpha = \delta A, \quad \beta = \delta B, \quad \gamma = \delta C,$$

d'où nous tirons

$$\delta = \delta^2 \Delta$$

ou

$$\delta = \frac{1}{\Delta}.$$

Par suite,

$$\alpha = \frac{A}{\Delta}, \quad \beta = \frac{B}{\Delta}, \quad \gamma = \frac{C}{\Delta}.$$

formules qui résolvent complètement le problème.

Il serait curieux de rechercher si d'autres formes de fonction que celle admise par Gauss se reproduiraient ainsi elles-mêmes par composition des lois d'erreurs, mais cette recherche semble *à priori* d'une grande difficulté. »

M. Mansion lit un complément de sa note *Sur une opinion de Galilée relative à l'origine commune des planètes* (ANNALES, t. XVIII, 1re partie, pp. 46-49).

On peut interpréter le texte de Galilée de deux manières autres que celle qui a été exposée à la séance du 25 janvier 1894.

Soient S le Soleil, O le point d'où l'on suppose que sont parties toutes les planètes, avec *une même accélération naturelle* G, comme dit Galilée, d la distance OS, R et R′ les rayons des orbites de deux planètes, D et D′ les longueurs des deux tangentes menées de O aux cercles de rayon R et R′. On aura

$$d^2 = D^2 + R^2 = D'^2 + R'^2,$$
$$D = \tfrac{1}{2} G t^2, \qquad D' = \tfrac{1}{2} G t'^2,$$
$$V = Gt, \qquad V' = Gt',$$
$$2\pi R = VT, \qquad 2\pi R' = V'T',$$

si l'on désigne par t, t' les temps employés pas les planètes pour parcourir D et D′, par T et T′ les durées des révolutions, par V et V′ les vitesses des planètes sur leurs orbites ou à l'extrémité de D et D′. On déduit de là

$$D = \frac{2\pi^2}{G}\frac{R^2}{T^2}, \qquad D' = \frac{2\pi^2}{G}\frac{R'^2}{T'^2},$$

$$d^2 = R^2 + \frac{4\pi^4}{G^2}\frac{R^4}{T^4} = R'^2 + \frac{4\pi^4}{G^2}\frac{R'^4}{T'^4}.$$

Introduisons dans cette relation les valeurs de T, T′ données par la troisième loi de Képler, savoir :

$$R^3 = lT^2, \qquad R'^3 = lT'^2,$$

l étant une constante; elle deviendra

$$d^2 = R^2 + \frac{4\pi^4 l^2}{G^2}\frac{1}{R^2} = R'^2 + \frac{4\pi^4 l^2}{G^2}\frac{1}{R'^2},$$

d'où l'on tire aisément

$$RR' = \frac{2\pi^2 l}{G},$$

$$d^2 = R^2 + R'^2,$$

relations évidemment contraires à la réalité. Dans l'interprétation précédente, on trouvait aussi

$$RR' = \frac{2\pi^2 l}{G},$$

mais on avait

$$d = R + R'.$$

Au lieu de supposer que le mouvement des planètes, depuis O jusqu'à leur orbite actuelle, a lieu avec une accélération G, admettons que l'accélération soit seulement G cos φ, φ désignant l'angle de la tangente menée de O à l'orbite avec OS. Dans ce cas, on a, pour la planète dont l'orbite a le rayon R,

$$D = \frac{1}{2} G \frac{D}{d} t^2 \quad \text{ou} \quad d = \frac{1}{2} G t^2.$$

De même, pour une seconde planète,

$$d = \frac{1}{2} G t'^2,$$

Par suite, $t = t'$ et l'on a

$$V = G\frac{D}{d}t, \quad V' = G\frac{D'}{d}t;$$

puis, successivement,

$$V : V' = D : D',$$
$$VT : V'T' = DT : D'T',$$
$$R : R' = DT : D'T',$$
$$R^2 : R'^2 = D^2T^2 : D'^2T'^2.$$

En introduisant la troisième loi de Képler dans la dernière relation, elle devient

$$R^2 : R'^2 = D^2R^3 : D'^2R'^3,$$

c'est-à-dire

$$D'^2R' = D^2R,$$

ou

$$(d^2 - R'^2)R' = (d^2 - R^2)R.$$

On déduit de là

$$d^2 = R^2 + R'^2 + RR',$$

relation incompatible avec les faits.

M. Mansion fait ensuite une communication *Sur une opinion de Galilée relative à la chute des corps.*

On trouve cette opinion de Galilée dans la seconde journée des *Dialoghi* (*) et on peut la résumer comme il suit.

Soit C le point de départ d'un point pesant qui tombe vers le centre A de la Terre; pendant le temps de la chute, C est entraîné par le mouvement de rotation de la Terre en D; la ligne AD rencontre la surface de la Terre en I. La trajectoire du point pesant, dans l'espace, est une courbe CI qui, prolongée, doit, d'après Galilée, passer par le point A. Galilée affirme que cette courbe est *à peu près* une demi-circonférence de diamètre AC et qu'elle est parcourue d'un mouvement uniforme par le point pesant.

Galilée ne donne pas une démonstration en forme de ce théo-

(*) *Dialoghi*, etc. (éd. Sonzogno. Milan, 1877), p. 154-157; traduction allemande, pp. 172-175. Comparez la longue note du traducteur, pp. 524-526.

rème: il se contente de faire remarquer qu'une trajectoire ayant à peu près cette forme peut être attribuée à un corps dont le mouvement vertical est accéléré, tandis qu'il est entraîné par le mouvement uniforme de rotation de la Terre. Si la trajectoire est vraiment un cercle CIA, il est facile de prouver d'ailleurs, comme il le fait observer, que le mouvement du point pesant sur le cercle doit être uniforme.

On peut s'expliquer de la manière suivante l'origine de cette opinion de Galilée. Supposons le point C situé à l'équateur, et soient B le point où le rayon CA rencontre ce grand cercle, IH la perpendiculaire abaissée de I sur CA. L'arc IB est proportionnel au temps de la chute du point pesant, tandis que la hauteur de la chute DI ou CB est proportionnelle au carré du temps. On a donc

$$\text{arc BI} = kt, \qquad \text{CB} = k't^2\,;$$

De fait, en prenant le mètre et la seconde pour unités, on a, à peu près, $k = 500$, $k' = 5$.

Si t est petit, on a sensiblement

$$\text{arc BI} = \text{CI} \qquad \text{et} \qquad \text{CB} = \text{CH}.$$

CH est donc à peu près proportionnel au carré de CI et, par suite, au début, la trajectoire CIA est voisine d'une circonférence. Mais le diamètre de cette circonférence est loin d'être égal au rayon de la Terre; il est égal simplement à $k' + (k^2 : k')$, c'est-à-dire à 50 000 mètres environ, moins que la cent vingt-cinquième partie du rayon de la Terre. Si Galilée fait passer la trajectoire approximative par le centre de la Terre, c'est sans doute parce que la trajectoire réelle, selon lui, doit passer par ce point.

Après que l'un des interlocuteurs des *Dialoghi* a essayé d'établir que, si la Terre a un mouvement de rotation, le mouvement des corps pesants, dans leur chute, est presque un mouvement circulaire uniforme, celui qui lui donne la réplique a soin d'en conclure que rien ne se meut naturellement d'un mouvement rectiligne, pas même les corps pesants dans leur chute vers

la Terre. Il oublie que les raisonnements de son ami, en aucun cas, ne sont applicables si l'on se place à l'un des pôles de la Terre : là au moins la chute des corps se ferait nécessairement en ligne droite.

M. Vicaire communique ensuite à la première et la seconde sections réunies, un mémoire sur la constitution physique du Soleil.

Ce mémoire inédit n'est pas nouveau. Il a été présenté à l'Académie des sciences de Paris, par Elie de Beaumont, le 26 août 1872; un extrait en a paru dans le compte rendu de la séance, mais ce résumé sommaire de considérations complexes et souvent délicates ne peut guère permettre d'en apprécier la portée.

L'auteur n'a pas publié le mémoire *in extenso* parce qu'il aurait voulu résoudre auparavant un certain nombre de questions connexes et présenter au public un ensemble de solutions qui se seraient prêté un soutien mutuel. Les circonstances ne le lui ayant pas permis, il croit utile de le publier maintenant.

En l'examinant de nouveau, il estime que ses raisonnements n'ont rien perdu de leur force ni ses conclusions de leur valeur.

Les études qui ont été poursuivies depuis vingt ans sur le Soleil ont confirmé sur plusieurs points importants et quelquefois renforcé les faits qui lui avaient servi de point de départ. A cette époque, à la suite des travaux de Kirchhoff, de Faye et de Secchi, on s'occupait avec une sorte de passion de cette question de la constitution du Soleil ; aujourd'hui le calme s'est fait autour de cette question ; on se contente d'étudier le Soleil ; mais les idées que ces savants avaient mises en faveur, semblent encore généralement admises par un accord tacite. Un travail qui les combat pour revenir aux vues des astronomes antérieurs, de William Herschell, notamment, du moins en ce qu'elles ont de plus essentiel, n'a donc rien perdu de son actualité et peut-être trouvera-t-il les esprits mieux disposés qu'à l'époque où il fut écrit; quelques notes suffiront pour le mettre au point, en ce concerne les observations faites depuis cette époque.

Ce travail, ainsi qu'il a été dit plus haut, est, par sa nature, difficile à analyser utilement; on se bornera à en reproduire ici les conclusions. L'auteur les formule ainsi :

« En résumé, je crois avoir établi dans ce travail :

1° Qu'il existe sous la photosphère au moins une couche d'une certaine épaisseur dont la température est inférieure à celle de la photosphère;

2° Que l'existence de cette couche et le fait que les taches rayonnent moins de chaleur que la photosphère, prouvent que la température de celle-ci n'est pas entretenue par la chaleur sensible de la masse intérieure. Cela résulte également de la constance de la radiation et de quelques autres considérations. Il existe donc nécessairement une cause actuelle de production de chaleur;

3° Que les mouvements des taches ne démontrent pas que le Soleil soit gazeux jusqu'à une profondeur égale à une fraction notable du rayon; qu'il y a lieu de penser que ces mouvements sont produits par la cause superficielle qui produit les taches elles-mêmes et que la considération de ces mouvements combinée avec d'autres qui indiquent l'existence d'un noyau non gazeux, conduit à regarder ce noyau comme liquide;

4° Que ce noyau peut garder une température constante, la chaleur que rayonne la photosphère étant employée à en gazéifier les parties superficielles et à échauffer les gaz ainsi produits avant leur arrivée dans la photosphère; que d'ailleurs la quantité de chaleur reçue par ce noyau peut et doit être une fraction minime de celle que la photosphère rayonne au dehors; qu'enfin le temps depuis lequel ce noyau est soumis à cette volatilisation n'est peut-être lui-même qu'une fraction assez faible de la durée totale des âges géologiques. »

Ce travail étendu de M. Vicaire sera soumis à des commissaires.

Mercredi, 4 avril 1894. — M. Ch. Lagasse-de Locht entretient la section d'un sujet qu'il a déjà traité devant la Société scientifique, savoir : le choix du meilleur système d'alimentation d'eau pour les grandes agglomérations.

L'auteur fait d'abord observer que l'esprit dogmatique *à priori* de chaque science, ou dans chaque science, peut conduire les savants qui les cultivent exclusivement à d'étranges erreurs, quand ils s'attaquent à des questions complexes dépendant de plusieurs d'entre elles.

L'art de l'ingénieur doit souvent s'adresser à de nombreuses sciences, y compris les sciences sociales, en désignant ainsi la connaissance, même juridique, des hommes et des choses. Mais dans l'interrogatoire que l'art de l'ingénieur fait subir aux sciences, il doit recourir soit à la méthode d'observation, soit, plus rarement, à la méthode expérimentale.

Dans la question dont il s'agit, la vraie solution dépend de considérations puisées à la fois dans la géologie, la bactériologie, le droit public et privé et même le droit des gens. Beaucoup de projets ont le défaut de n'être conçus que d'après des données échappant d'un côté ou de l'autre à la méthode d'observation.

Des faits récents constatés minutieusement 1° ont renversé les conclusions tirées de spéculations relatives à l'allure de certaines couches géologiques à Bruxelles; 2° ont prouvé que le filtre industriel n'était pas le bon instrument qu'on avait imaginé; 3° que la pureté des eaux d'un fleuve peut être différente, selon l'endroit où on les recueille; qu'elle peut varier avec le développement de l'industrie à l'amont de la partie où l'on veut puiser; que, s'il s'agit d'un fleuve international, des questions d'une portée capitale peuvent surgir à propos de la contamination des eaux échappant à la répression des lois nationales; 4° que les galeries filtrantes, peu nuisibles à l'agriculture dans tel pays peu peuplé, le deviennent beaucoup dans une région à population dense où le sous-sol a une constitution géologique différente.

Conclusion : A cause des incertitudes de la science et des questions de droit privé et public que soulèvent toutes les autres solutions, le mieux, pour les grandes agglomérations, est de recourir, quand c'est possible, aux eaux de source.

Le travail de M. Lagasse-de Locht sera soumis à des commissaires.

M. Vicaire expose ses idées *Sur le principe de l'inertie et sur la notion du mouvement absolu en mécanique.*

Son attention a été appelée sur ce point par un ouvrage du Dr H. Streintz, professeur de physique mathématique à l'Université de Gratz « sur les fondements physiques de la mécanique ».

Carl Neumann, dans un discours célèbre, a insisté sur ce que présente d'insuffisant l'énoncé ordinaire du principe de l'inertie. Parler d'un mouvement rectiligne n'a pas de sens si l'on ne définit au préalable le système de comparaison auquel on rapporte ce mouvement. Il conclut à l'existence d'un corps *Alpha* invariable et immobile auquel se rapportent réellement les mouvements.

Déjà Euler avait admis la nécessité d'une réalité que nous désignons sous le nom de lieu.

Streintz constate qu'au moyen de divers appareils nous pouvons reconnaître dans le mouvement autre chose qu'un déplacement relatif des parties de la matière entre elles.

Ainsi, l'axe d'un gyroscope a une direction invariable par rapport aux étoiles; mais il y a tout lieu de penser que les étoiles n'y sont pour rien et qu'en réalité c'est par rapport à l'espace qu'a lieu cette fixité.

Un système qui comprend deux directions fixes par rapport à l'espace n'a qu'un mouvement de translation. Nous avons donc un moyen physique de reconnaître un pareil système.

Streintz conclut que le mouvement rectiligne mentionné dans l'énoncé du principe de l'inertie doit être rapporté à un pareil système, mais qui, de plus, ne soit soumis à aucune influence étrangère.

Un système de comparaison remplissant cette double condition ne peut avoir qu'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, c'est ce que Streintz appelle un *système fondamental.* Pour l'homme, il ne se distingue pas d'un système en repos absolu; il est inutile de chercher à établir une différence entre ces deux cas, de commencer par établir les équations générales de la mécanique pour le second et de faire un raisonnement pour passer au premier.

M. Vicaire ne partage pas cette opinion. Tout en reconnaissant que nous n'avons aucun moyen expérimental de distinguer ces

deux cas, il pense que nous pouvons aller plus loin par l'analyse.

Si tout l'univers était anéanti à l'exception d'un point matériel, admettra-t-on que ce point n'aura plus de mouvement ou qu'il aura un mouvement indéterminé ? Or, s'il continue à se mouvoir en ligne droite, cette ligne droite sur laquelle il est assujetti à se mouvoir comme dans un tube a une réalité en dehors de lui, c'est-à-dire en dehors de toute matière.

Donc il existe un espace absolu réel. Le mouvement absolu est une réalité. L'état de mouvement se distingue de l'état de repos en lui-même et non pas seulement par rapport à l'homme.

Cette manière de voir est bien d'accord avec nos idées actuelles sur l'énergie.

Qu'un point matériel ait une certaine vitesse ou que le reste de l'univers ait la même vitesse en sens contraire, c'est la même chose au point de vue de leurs relations, mais c'est bien différent au point de vue de la quantité d'énergie. Il est donc naturel de penser que c'est différent en réalité.

Cette communication donne lieu à une discussion à laquelle prennent part MM. Dutordoir, Goedseels, Pasquier et Mansion.

Le travail de M. Vicaire paraîtra dans la seconde partie des *Annales*. La section décide de laisser la discussion sur les principes de la mécanique à l'ordre du jour de ses futures sessions.

M. Mansion fait connaître les anomalies que présentent, au point de vue arithmétique, les principaux systèmes de représentation proportionnelle proposés dans ces derniers temps.

Une autre communication de M. Mansion sur la géométrie non euclidienne est renvoyée à la prochaine session.

Enfin la section procède au renouvellement de son bureau. Sont élus :

Président : M. G. Humbert.
Vice-Présidents : MM. C. Le Paige et J. Carnoy.
Secrétaire : M. H. Dutordoir.

Deuxième section.

Mardi, 3 avril 1894. — M. Van der Mensbrugghe, professeur à l'Université de Gand, donne lecture de la note suivante, envoyée par le R. P. Leray, sur *la Théorie des phénomènes capillaires.*

« Dans la session d'avril 1893, M. Van der Mensbrugghe a fait une communication intitulée : *Réfutation des objections du R. P. Leray contre la théorie de la tension superficielle des liquides*, au sujet de laquelle je vais présenter quelques observations.

Je ferai remarquer d'abord que mon article, publié dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* du Dr Olivier du 15 mars 1893, a pour titre : *Une nouvelle théorie de la capillarité.* Loin d'y combattre la tension superficielle des liquides, j'admets moi-même l'existence de cette tension et je me borne à critiquer la théorie de la capillarité fondée uniquement sur l'action de forces tangentielles à la surface des liquides, parce que je crois devoir leur adjoindre des forces normales à cette surface, produites par la pression de l'éther, et que je trouve dans celles-ci la raison d'être de celles-là. De plus, je discute quelques démonstrations usuelles; et, sans affirmer que les raisonnements employés soient vicieux, je déclare qu'ils renferment pour moi des obscurités que je ne parviens pas à dissiper.

M. Van der Mensbrugghe reprend deux ou trois de ces démonstrations. Je ne le suivrai pas dans tous ses développements; j'examinerai simplement la démonstration qui conduit à la formule fondamentale des théories capillaires, et je me permettrai de lui dire en quoi elle me semble encore obscure, telle qu'il la présente.

Au § 4 de la communication de M. Van der Mensbrugghe (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 17e année, 1892-1893, pp. 91-97), il y a une réclamation de priorité en faveur de Young, que je concède volontiers; mais pour la rigueur des raisonnements, je fais des réserves.

M. Van der Mensbrugghe, après avoir décrit autour d'un point M de la surface liquide le contour *abc* (fig. 1), et l'avoir divisé en éléments égaux, ajoute : « Si, » par le milieu de l'un des élé- » ments *ab*, on mène une ligne » *mMm'* normale à *ab*, passant » par M et aboutissant norma- » lement en *m'*, milieu d'un » autre élément *a'b'*, chacun » des éléments dont cette ligne » est formée sera sollicité par » deux forces égales et con- » traires, et l'ensemble de » toutes les forces exercées sur » la ligne *mMm'* pourra, en réalité, être remplacé par les deux » tensions extrêmes *mf*, *m'f'*, puisque toutes les autres se » détruisent deux à deux comme étant égales et contraires. » Après avoir lu et relu ce passage, j'avoue qu'il me semble toujours obscur.

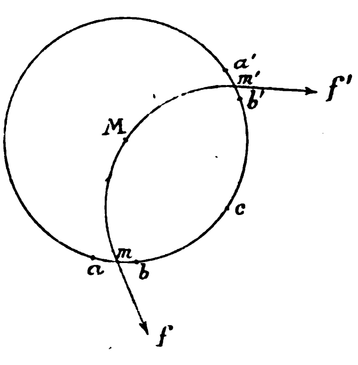


Fig. 1.

Examinons-le de près, en nous souvenant de l'hypothèse admise que tout élément *ab*, d'une courbe *abc* tracée à la surface d'un liquide, est sollicité par deux forces égales et contraires, tangentes à la surface, perpendiculaires à l'élément et proportionnelles à sa longueur. Les forces *f* et *f'*, sur la figure 1 de M. Van der Mensbrugghe, sont bien dirigées perpendiculairement aux éléments *ab* et *a'b'*, et elles doivent avoir pour antagonistes des forces — *f*, — *f'* (fig. 2) qui ne sont pas représentées figure 1. Mais quelle direction faut-il donner aux forces qui sollicitent les éléments de la ligne *mMm'* ? Si on les considère, suivant l'hypothèse mentionnée, comme perpendiculaires à ces éléments, on ne conçoit pas qu'elles puissent détruire

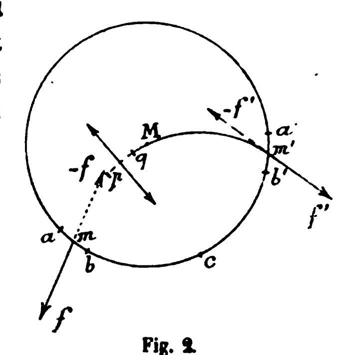


Fig. 2.

les forces $-f$, $-f'$ appliquées en ab, $a'b'$, qui les croisent à angle droit.

En présence de cette difficulté, je me suis dit que sans doute j'interprétais mal la pensée de M. Van der Mensbrugghe; que la courbe mMm' n'était pas une ligne mathématique comme abc, mais qu'elle représentait l'ensemble des deux triangles curvilignes Mab, $Ma'b'$ (fig. 3), et que les forces en question devaient être appliquées normalement aux petits arcs transversaux a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3. Soient $(f_1, -f_1)$, $(f_2, -f_2)$, $(f_3, -f_3)$ les forces correspondant à chacun de ces arcs. Si on les envisage comme se détruisant deux à deux, elles ne peuvent influer en rien sur $-f$ et $-f'$. Si l'on veut opposer $+f_1$ à $-f$, $+f_2$ à $-f_1$, et ainsi de suite, ces forces opposées ne se détruiront plus, puisque, proportionnelles aux arcs ab, a_1b_1, a_2b_2 ..., elles vont sans cesse en diminuant depuis ab jusqu'au point M.

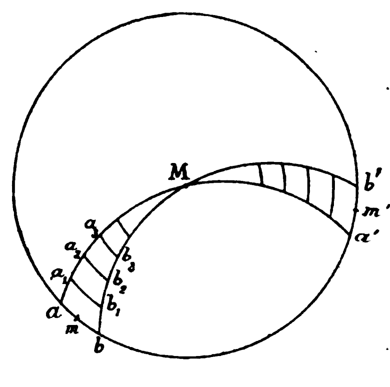


Fig. 3.

En définitive, j'ignore quelle est, au juste, la pensée de M. Van der Mensbrugghe sur la nature et la direction des forces qu'il met en jeu dans son raisonnement; mais, à tous les points de vue où je me suis placé, la conclusion m'a paru obscure.

Malgré les dissentiments qui me séparent, au point de vue théorique, de notre éminent confrère, je me plais à proclamer que j'ai lu, avec le plus vif intérêt, dans les *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, les expériences si variées et si ingénieuses au moyen desquelles il a prouvé l'existence de la tension superficielle des liquides et rattaché à cette cause de nombreux phénomènes jusque-là mystérieux. »

Ensuite, le R. P. Thirion, S. J., résume un travail de M. Pierre Duhem, maître de conférences à la Faculté des sciences de Rennes, intitulé : *Fragments d'un cours d'optique*, et destiné aux *Annales*, 2e partie. Le R. P. Thirion et M. Van der Mensbrugghe sont chargés d'examiner ce travail; leur rapport sera présenté dans le plus bref délai.

M. Van der Mensbrugghe fait ensuite la communication suivante *sur la constitution des nuages*.

« On a beaucoup écrit sur la question de savoir si les nuages sont formés de vésicules creuses ou de petits globules pleins; mais nous connaissons aujourd'hui différents faits qui dissipent, me paraît-il, toute espèce de doute à ce sujet.

Citons d'abord le plus direct d'entre ces faits; il a été énoncé, en 1851, par Joseph Plateau (*); l'auteur a recours au procédé de F. Duprez pour maintenir suspendue une colonne d'eau dans un tube de verre, fermé en haut, ouvert en bas, et ayant 15 ou 16 millimètres de diamètre intérieur (**); au-dessous de la surface libre du liquide se trouve un vase contenant de l'eau bouillante, d'où s'élève incessamment un courant de vapeur visible; dans ces conditions, jamais le liquide suspendu ne perd sa transparence parfaite, malgré la multitude de sphérules de vapeur visible qui viennent frapper sa surface libre inférieure, pourvu qu'on ait soin d'essuyer la paroi extérieure du tube. N'est-ce pas une preuve que la vapeur condensée ne contenait pas de sphérules remplies d'air et qu'elle était bien formée de globules pleins? A mon avis, cette expérience constitue un argument très sérieux contre l'hypothèse, si souvent invoquée, de vésicules dans les nuages.

Voici maintenant des considérations, théoriques il est vrai,

(*) *Mémoire sur un cas particulier de l'équilibre des liquides* (1re partie, NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, t. XXVI, 1851; — 2e partie, IBID., t. XXVII 1854).

(**) *Une expérience relative à la vapeur vésiculaire.* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, t. XXXII, p. 251.)

mais pourtant très plausibles, qui plaident également en faveur de la forme globulaire des sphérules formant les nuages.

Si ces sphérules sont très petites, elles se soutiennent dans l'air avec d'autant plus de facilité qu'elles sont entourées d'une couche très mince où la densité va en diminuant vers l'extérieur, et que, d'après le principe de lord Kelvin, elles s'évaporent d'autant plus rapidement qu'elles sont plus ténues.

Si, au contraire, les globules du nuage sont relativement gros, ils obéissent à leur poids; mais, en tombant, ils traversent des couches d'air de plus en plus chaudes et s'évaporent conséquemment de plus en plus vite, jusqu'à atteindre un diamètre à partir duquel la résistance de l'air s'oppose à leur chute ultérieure.

On n'a donc nul besoin de supposer les sphérules plus ou moins grosses remplies d'air pour expliquer la suspension des nuages dans l'atmosphère; du reste, cette suspension n'est que relative, car les nuages changent presque constamment de forme, ce qui prouve bien soit l'évaporation, soit la chute de certaines portions qui les constituent.

M. Felix Leconte expose les résultats d'expériences faites sur un régulateur de tension de Thury. Cet appareil a été installé sur une dynamo d'éclairage de 50 chevaux, entraînée par une machine à vapeur de 200 chevaux, qui actionne en même temps quatre ponts roulants de 20 tonnes. On comprend que, quelle que soit la régularité du moteur à vapeur, la tension de l'éclairage baisse lorsque deux ponts viennent à démarrer simultanément. Dans le cas présent, l'éclairage se faisait à 70 volts, et la chute de tension atteignait 10 volts. Après intercalation de l'appareil Thury, les variations de tension ne dépassaient plus 2 volts, quelles que fussent les variations de charge du moteur à vapeur. La manette automatique de réglage oscillait continuellement entre deux plots voisins. L'appareil étant très sensible, M. Leconte espère, en diminuant la résistance des bobines introduites dans le circuit Shunt de la dynamo, arriver à le régler à une unité près.

M. l'abbé Coupé appelle l'attention sur ce fait qu'un grand nombre de photographies sur plaques argentées (procédé de

Daguerre) présentent certaines colorations rappelant les couleurs de l'original. Il attribue ces phénomènes aux interférences et se demande si M. Lippmann ne s'en est pas inspiré pour créer sa photographie des couleurs.

La section décide ensuite qu'il y a lieu de mettre au concours une nouvelle question. Le choix de celle-ci est renvoyé à la prochaine réunion.

Enfin, on procède à l'élection du bureau pour l'année 1894-1895. Sont élus :

Président :	M. Van der Mensbrugghe.
Vice-Présidents :	M. Fr. De Walque et
	R. P. Lucas., S. J.
Secrétaire :	M. l'abbé Coupé.

Troisième section.

Mardi, 3 avril 1894. — MM. de Lapparent, comte Domet de Vorges, de la Vallée Poussin et l'abbé Renard s'excusent de ne pouvoir assister aux séances de la section.

M. Mansion, secrétaire général de la Société, fait appel au zèle des membres de la troisième section pour remédier à l'envahissement de la seconde partie du volume des *Annales* par les mathématiques.

La section a reçu d'un de ses membres, M. l'abbé Rachon, curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle), des observations sur le compte rendu de la séance du mercredi 12 avril 1893 (*). M. l'abbé Rachon fait remarquer l'omission de son nom parmi ceux des membres qui ont pris part à la discussion sur l'évolution, et il rappelle les objections présentées par lui contre cette doctrine.

(*) Voir *Annales*, t. XVII, 1re partie, p. 100.

On décide de donner acte à M. Rachon de sa réclamation, mais de ne pas publier sa lettre *in extenso*, vu que le compte rendu de la séance du 12 avril 1893 n'a pas rapporté en détail les opinions émises par les autres membres qui avaient pris part à la discussion.

Le R. P. Bolsius, S. J., professeur de sciences naturelles au collège de la Compagnie de Jésus, à Oudenbosch (Hollande), fait une double communication, la première sur *le sphincter du conduit de la vésicule chez les* GNATHOBDELLIDES, l'autre sur *un ennemi de l'*AULASTOMUM GULO. Ces deux communications sont insérées plus bas, dans le compte rendu de la séance du 4 avril, à la suite d'une troisième note du même auteur.

En outre, le R. P. Bolsius dépose un mémoire intitulé : *Anatomie des organes ciliés des Hirudinées du genre des* GLOSSIPHONIDES, pour lequel il a demandé un subside à la Société. La section nomme rapporteurs de ce travail le R. P. Hahn, S. J., professeur de zoologie au collège Notre-Dame de la Paix, à Namur, et M. A. Buisseret, préfet des études et professeur de sciences au collège communal de Nivelles.

Le R. P. Schmitz, S. J., expose l'ensemble de ses travaux sur la géologie des bassins houillers de Belgique. Le but qu'il poursuit est de réunir les matériaux pour l'étude géologique complète des bassins houillers belges et de parvenir ainsi à donner une solution plus satisfaisante à deux questions capitales et de grand intérêt.

La première doit conduire à un résultat pratique et mérite, à ce titre, l'attention des industriels et de leurs ingénieurs : la synonymie des couches est-elle bien connue et faut-il admettre comme définitifs tous les résultats prétendûment acquis jusqu'à présent ?

La seconde est théorique et semble si peu résolue qu'elle passionne encore les homme de science, partisans d'hypothèses fort différentes : comment la houille s'est-elle formée et d'où viennent les matériaux qui constituent ses gisements ?

Après mûr examen, après des essais de plusieurs années, la méthode monographique semble au P. Schmitz la seule qui puisse conduire à un résultat positif et concluant.

Il détaille sa méthode et montre, par des exemples, comment elle prévient les difficultés et avec quelle assurance elle permet d'avancer quand on la suit avec fidélité et constance.

Cette communication donne lieu à un échange d'observations entre M, le comte François van der Straten-Ponthoz, le R. P. Fr. Dierckx et le R. P. Schmitz.

M. le lieutenant Van Ortroy fait parvenir à la section la photographie d'une carte de Flandre, exécutée en 1538 et conservée au *Germanisches National Museum* de Nuremberg.

Cet envoi était accompagné de la note suivante.

L'auteur de la carte est Pierre Van der Beke, né à Gand. Il est impossible d'identifier le personnage, malgré les nombreuses et patientes recherches faites dans les Archives de la ville de Gand, par M. le capitaine pensionné Van den Bemden. Nous nous trouvons devant trois Pierre Van der Beke : un échevin de la ville de Gand, un brasseur et un drossart du pays de Grimberghe, de 1546-1560. Il nous semble cependant qu'on peut considérer provisoirement comme l'auteur de la carte le Pierre Van der Beke qui fut échevin de la ville de Gand. Il mourut en 1567. On compte parmi ses neveux l'évêque d'Anvers, Livinus Torrentius.

La carte de Van der Beke constitue à la fois un important document géographique et bibliographique.

Bibliographie. La carte a été imprimée à Gand chez Pierre De Keyzere. M. Van der Haeghen, conservateur en chef de la Bibliothèque de l'Université de Gand, s'occupe de cet imprimeur dans son magistral ouvrage : *Les Imprimeurs gantois* (*). La carte de Flandre lui était restée inconnue. Dès qu'il a su qu'un exemplaire unique était conservé à Nuremberg, il s'est empressé d'en demander une reproduction.

(*) Cfr aussi *Biographie nationale.*

La carte est une gravure sur bois. Quelques légendes seules et des armoiries sont composées au moyen de caractères mobiles. Ces caractères sont probablement du graveur Lambrecht.

Les amateurs d'art héraldique trouveront aussi à exercer leur sagacité. On voit sur la carte de nombreuses armoiries de communes. Peut-être y a-t-il lieu d'en faire une étude spéciale.

Géographie. La carte de Van der Beke de 1538 est la plus ancienne carte de Flandre imprimée qui soit venue jusqu'à nous. Elle précède de deux ans celle dressée par G. Mercator et dont la reproduction a été faite, il y a quelques années, par les soins de l'Administration communale d'Anvers.

Quelle est la valeur scientifique de notre document ?

Quelle est sa valeur topographique ; élucide-t-il divers points historiques contestés ?

Supporte-t-il la comparaison avec la carte de Flandre de Mercator ?

Répondons d'abord à cette dernière question.

Si l'on compare les deux cartes, celle de Mercator est de beaucoup supérieure.

Elle est à une plus grande échelle, plus exacte au point de vue de diverses données topographiques, et mieux coordonnée pour le rapport qu'il doit y avoir entre les diverses parties de la carte. Chez Van der Beke, on a une partie très écrasée, tandis qu'une autre semble avoir son développement normal. Chez Mercator, les proportions, donc l'échelle, sont mieux observées.

Les deux cartes, dans certaines parties, ont des liens de parenté.

Ornementation. Les quatre ours légendaires figurent sur les deux cartes.

Configuration du pays. Il y a chez Mercator quelques réminiscences de la carte de Van der Beke. Ainsi, le pays de Biervliet, les parages de Saint-Omer, etc.

La carte de Van der Beke n'a pas grande valeur au point de vue scientifique pur.

Pas de projection, pas de réseau de latitude et de longitude.

On ne peut pas contester qu'au point de vue historique et topographique proprement dit, la carte de Van der Beke a de l'importance.

Avec la carte de Mercator (que celui-ci ait pris ou non pour guide l'œuvre de Van der Beke), elle fournit les plus anciennes archives imprimées pour l'étude de la topographie de la Flandre. L'étude comparée de ces deux cartes s'impose. On rangera les faits dans deux catégories.

Points de ressemblance entre les cartes.

Points où les opinions des deux auteurs diffèrent. L'Escaut en aval d'Anvers est inexact chez Van der Beke; la topographie de la plage, Ostende, Nieuport, etc., semble forcée chez ce dernier; l'échelle, nous l'avons déjà dit, n'est pas non plus toujours bien observée chez Van der Beke; il donne une partie de la Zélande qui manque chez Mercator. Mais cette donnée semble sujette à caution, car une île de la Zélande vient occuper le cours de l'Escaut près d'Anvers.

Il faudra d'ailleurs comparer les deux cartes : *a*) avec les données fournies par les historiens; *b*) avec diverses cartes manuscrites de la Flandre au nord de Gand, conservées aux Archives de l'État dans cette ville. Ces cartes sont des reproductions successives, faites par des géomètres jurés, d'une carte de 1520 de Dorenbault. Elles présentent de l'intérêt. M. le chevalier Marchal s'en est déjà occupé.

Mercredi, 4 avril. — Le R. P. Schmitz demande que la section émette un vœu d'adhésion à l'entreprise proposée par M. F. Van der Haeghen, bibliothécaire de l'Université de Gand, d'un catalogue général des bibliothèques publiques (*). Le R. P. Schmitz expose le plan de cette œuvre en proposant certaines modifications.

Après quelques observations de M. le comte Fr. van der Straten Ponthoz, la section adopte la proposition du R. P.

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1893, 3e série, t. XXVI, pp. 690-694.

Schmitz et le charge de faire parvenir à M. Van der Haeghen l'expression de sa sympathique adhésion.

A propos d'une question du Fr. Alexis, M. G., MM. le chanoine Delvigne, le comte Fr. van der Straten Ponthoz, le marquis de Trazegnies et le R. P. Van den Gheyn signalent les principaux travaux qui ont paru sur la bibliographie géographique de la Belgique.

A la suite d'une discussion qui a surgi dernièrement à la Société géologique de Belgique (*), le R. P. Schmitz a publié dans ses *Bulletins* (**) une note à propos des hypothèses diverses qui cherchent à expliquer la formation de la houille.

Il se prononce pour une théorie mixte, qui fait appel *au transport* pour la majeure partie des sédiments houillers et qui, pour le mur des veines, a recours *à la formation sur place.*

C'est surtout sur ce dernier point qu'il s'appesantit. Il montre les stigmaires (rhizomes de végétaux houillers) munis de leurs radicelles, serpentant à travers la boue pétrifiée et présentant l'aspect caractéristique de racines parfaitement conservées *in situ.*

Le P. Schmitz ne se dissimule pas les objections que l'on peut opposer à sa théorie.

Voici les principales, ainsi que les réponses qu'il croit pouvoir y donner.

Dans la théorie alluvionnelle, dira-t-on, des eaux torrentielles entraînent *à la fois le terrain et les détritus végétaux* de toutes sortes : ce paquet hétérogène arrive dans le grand fleuve où il subit, par le seul fait du flottage, une préparation mécanique. Toutes les frondes de fougères, encore à peu près intactes, gagnent la surface, tandis que les rhizomes, plus lourds, gagnent le fond et *s'arrêtent à la vase.* Donc, pour qu'il y ait des stigmaires

---

(*) *Bulletin de la Société géologique,* t. XXI. Procès-verbaux de janvier.
(**) *Ibid.,* pp. LXXI-LXXV.

au toit, il faut que ce soient des fragments déjà flottés et capables de surnager tout comme les fougères.

Le P. Schmitz répond qu'il ne s'agit pas de rhizomes *s'arrêtant à la vase*, mais bien de rhizomes y pénétrant à la façon de racines en quête des sucs nourriciers. Il n'est pas possible que l'on fasse arriver dans les estuaires houillers, avec les *détritus végétaux*, assez de *terrain* pour constituer nos murs de veine, souvent asssez épais et couvrant des espaces aussi grands que les veines elles-mêmes.

On ne niera pas du reste que çà et là il puisse y avoir eu une île flottante — semblable à celles que charrient de nos jours encore les fleuves géants, — une île flottante enfouie dans l'estuaire. Là, naturellement, les rhizomes seront aussi *in situ*, mais ce fait doit être restreint en nombre et en étendue.

On me demandera, ajoute le P. Schmitz : « Avez-vous jamais » vu des empreintes végétales au mur d'une couche? Pourquoi? » S'il y avait formation sur place, pourquoi donc les frondes de » fougères ne seraient-elles pas tombées *in situ?* Ces frondes » constituent la partie superficielle et légère du paquet allu- » vionnel. »

Bien que le P. Schmitz possède déjà dans ses collections quelques empreintes de feuillage provenant du mur, il voudrait cependant en recueillir dans des conditions qui lui donnent une parfaite certitude. Ses idées théoriques sur la formation des bassins houillers belges lui permettent d'affirmer *à priori* que ce fait se rencontrera, mais rarement (*).

Enfin, on demande de constater l'*absence complète* de stigmaires dans les horizons marins à *Goniatites*.

Le P. Schmitz, tout en ne pouvant rien affirmer à ce sujet, ne croit pas que l'absence des stigmaires doive être aussi complète. Mais, à son avis, si quelqu'une de ces empreintes se trouvait dans les horizons marins, il faudrait qu'elle attestât d'un

(*) Depuis, l'auteur de cette communication a découvert des pièces dont on ne pourra récuser le témoignage. On trouvera les détails dans une note qu'il déposera au mois de mai à la Société géologique.

transport plus violent encore que celles qui se recueillent au toit des couches.

Cette communication donne lieu à un échange d'observations entre le R. P. Schmitz et MM. de Trazegnies, R. P. Dierckx, comte Fr. van der Straten Ponthoz.

On entend lecture des rapports de MM. Meunier et le docteur Matagne sur le travail présenté par le R. P. Rousseau, S. J., à la session de janvier (*).

Rapport de M. l'abbé Meunier. — « Malgré ses apparences modestes, ce travail suppose des recherches laborieuses et aussi une compétence indéniable de la part de l'auteur, qui a eu soin, du reste, de recourir aux lumières de M. Charles Baguet, le botaniste le plus versé dans la connaissance de la flore des environs de Louvain.

La publication de cet inventaire des plantes introduites, malgré l'inconstance de plusieurs d'entre elles, peut surtout intéresser vivement les jeunes botanistes, particulièrement nombreux à l'Université de Louvain.

Elle intéresse même les botanistes étrangers à la région, dont elle appellera une fois de plus l'attention sur les espèces de passage qui, par le développement croissant des transactions commerciales avec les pays les plus divers, tendent à prendre une place de plus en plus considérable au milieu de la flore indigène. »

Rapport de M. le Dr Henri Matagne. — « Le travail du R. P. Rousseau, S. J., présente un grand intérêt et mérite incontestablement de figurer dans nos *Annales*. Il est à souhaiter que les travaux de ce genre se multiplient. Ils aident puissamment à faire connaître l'état de la flore du pays ; on pourrait même les compléter encore en signalant, pour chaque plante en particulier, la voie certaine ou présumée d'introduction : ce sont là des recherches que les herborisateurs pourraient faire sans trop de difficultés dans leur rayon d'investigations scientifiques. »

(*) Voir p. 66.

La section adopte les conclusions des rapporteurs et vote l'impression aux *Annales* du travail du R. P. Rousseau.

Le R. P. H. Bolsius, S. J., présente un résumé des principales conclusions de ses recherches sur *les organes ciliés des Glossiphonides.*

Dans le mémoire qu'il a déposé (*) et qui traite en détail de cette matière, il donne de nombreuses figures, décrivant cinq espèces de *Glossiphonides* capturées aux environs de Louvain (Belgique) et d'Oudenbosch (Pays-Bas).

Voici quelques résultats des recherches poursuivies depuis bientôt six années sur ces formations intéressantes.

1° L'*organe cilié,* OC (voir la figure ci-après), dans toutes les espèces examinées, est en relation immédiate avec une cavité, CA, que nous nommons *la cavité annexe.*

2° Cette *cavité annexe* est plus ou moins remplie de cellules qui changent beaucoup pour l'aspect et le nombre à des époques différentes. Le dernier stade de ces cellules est semblable à celui de cellules mucipares, c'est-à-dire cellules vides avec noyau aplati fortement et appliqué contre la membrane.

3° Cette *cavité annexe* est fermée *de toute part,* excepté *uniquement* à l'endroit où entre l'organe cilié, OC. — Par conséquent cette *cavité annexe* ne communique pas avec l'organe segmentaire ou nephridium. Elle communique seulement avec la cavité périviscérale au moyen de l'*organe cilié.*

4° L'*organe cilié adulte* présente typiquement la forme d'un T, comme le montre la figure. Il y a trois parties à distinguer :

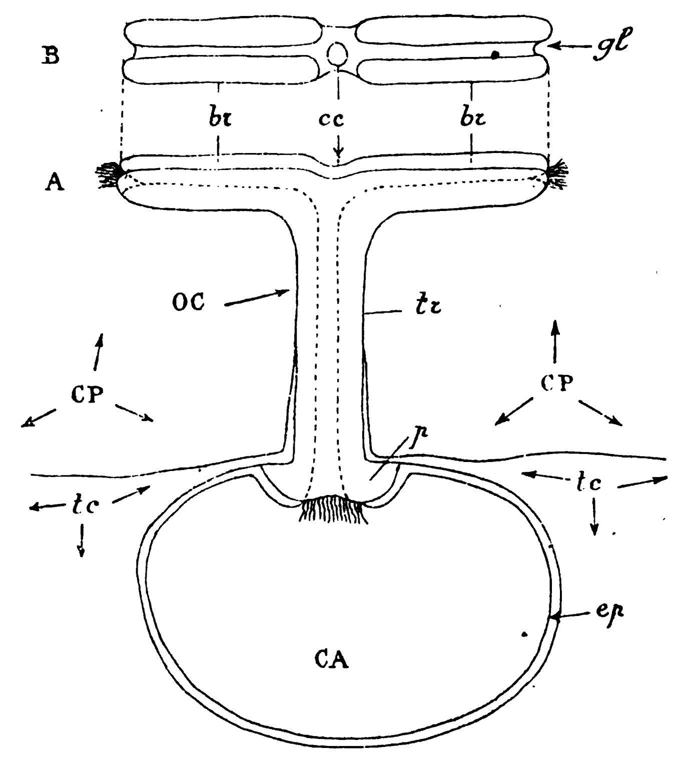
a) Le *pied, p,* partie renflée et enclavée dans la cavité annexe, CA.

b) Le *tronc, tr,* partie proéminente et flottant dans la cavité périviscérale.

c) Les *branches, br,* partie ornant le sommet du tronc.

5° Le tronc contient un canal central, intracellulaire; les branches sont creusées d'une *gouttière longitudinale.*

(*) Voir plus haut.



LÉGENDE.

A. Schéma de l'organe cilié, vu de côté, avec la cavité annexe chez les Glossiphonides.

OC. Organe cilié, composé de trois parties :

p. Le *pied*, partie immobile, enclavée dans la *cavité annexe* CA.

tr. Le *tronc* } parties flexibles, faisant proéminence dans la *cavité périviscérale*.
br, *br*. Les *branches* }

CP. La cavité périviscérale.

tc. Le tissu conjonctif.

ep. Revêtement épithélial de la cavité annexe.

B. L'organe cilié, vu d'en haut, pour indiquer la *gouttière longitudinale*, *gl*, et l'orifice du canal central, *cc*.

N. B. — Les *cils vibratiles* qui ornent le canal central et les parois de la gouttière longitudinale sont représentés ici aux extrémités seulement.

6° *L'organe cilié jeune* ne possède pas encore de *branches* au sommet, mais deux mammelons ou bourrelets seulement, séparés par une *gouttière transversale.*

Nous savons que nos conclusions, en premier lieu celles qui se rapportent à la *cavité annexe*, sont en contradiction formelle avec les conclusions de Bourne (1884) et de Leuckart (1893). Ces deux auteurs se sont occupés plus spécialement de cette cavité, de son contenu, de ses relations. Tous les deux maintiennent, chez les Glossiphonides (Clepsinides), la *communication directe* entre l'organe segmentaire et cette cavité; et en conséquence ils nomment la formation ciliée « entonnoir du nephridium ». Nous nions toute communication directe entre la cavité annexe et l'organe segmentaire, et en conséquence, pour ne pas embrouiller les idées par des homonymes qui ne sont pas synonymes, nous appelons cette même formation « organe cilié ».

Nous avons la ferme confiance que tôt ou tard d'autres micrographes verront ce que nous avons vu des centaines de fois dans nos séries de préparations, et qu'alors nos conclusions seront approuvées.

Voici les deux autres communications du même auteur qui ont été annoncées plus haut :

I. Dans son premier mémoire sur les organes segmentaires des Hirudinées, le R. P. Bolsius avait publié quelques détails sur *le sphincter* qui existe au conduit excréteur de la vésicule néphridienne chez les Hirudinides. Il était revenu sur ce même sujet dans les publications suivantes.

Récemment, le Dr Arn. Graf, dans un article du *Jenaischer Zeitschrift für Naturwissenschaft*, tome XXVIII, pages 166 et suivantes, dit avoir trouvé que nos observations sont inexactes, et que, au lieu d'*un* sphincter, il y en a *deux*, un au haut du conduit, et un autre au bas, et qu'entre ces deux sphincters puissants il y a toute une série de cellules sphinctériales isolées, n'appartenant ni à l'un ni à l'autre des deux sphincters.

Nous avons déposé, il y a quelques jours, un petit mémoire contenant le résultat de nos nouvelles observations sur un grand

nombre d'Hirudinides, tant indigènes qu'exotiques. Le sphincter, dans toutes les espèces, se montre *unique* et non dédoublé. Seulement l'étendue n'est pas partout la même; tantôt le sphincter n'occupe que le point le plus haut du conduit, tantôt il s'étend, en s'amincissant, sur la moitié supérieure du conduit excréteur. Au bas de ce conduit, il n'existe pas.

II. Un ennemi qui semble terrible pour l'*Aulastomum gulo* a été observé par le R. P. Bolsius, qui n'en a pas trouvé d'indication dans les auteurs. C'est une curiosité zoologique qu'il veut communiquer à la section.

Quelques *Aulastomum*, conservés vivants depuis plus d'une année dans un aquarium, n'avaient eu d'autre nourriture que ce que la faune microscopique leur fournissait. Ils avaient passé tout ce temps en compagnie de plusieurs Planaires, surtout de *Dendrocoelum lacteum*, dont un exemplaire est présenté aux membres. Jamais rien ne s'était passé de remarquable entre ces deux genres d'animaux. Mais lorsque les Sangsues eurent reçu, il y a une quinzaine de jours, quelques menus morceaux de viande crue, qu'elles avalèrent avec appétit, les Planaires se jetèrent sur les Sangsues. Immédiatement on vit celles-ci se tordre, s'enrouler et manifester une vive douleur. Parfois le sang sortait du corps de l'*Aulastomum* et apparaissait autour de la Planaire, qui malgré toutes ces contorsions ne lâchait pas prise. Quoique plusieurs fois l'*Aulastomum* passât avec la ventouse antérieure et la bouche armée de ses trois mâchoires dentées au-dessus du corps de la Planaire, il ne faisait pas la moindre tentative pour la saisir et s'en débarrasser en l'avalant ou en la déchirant.

Le plus souvent les Planaires ne quittaient l'*Aulastomum* qu'après s'être rassasiées. Alors la plaie qu'elles avaient faite saignait encore pendant quelques instants, mais l'*Aulastomum* se remettait bientôt.

Une fois un *Aulastomum* s'est débarrassé de ses assaillants en sortant de l'eau. Dès que les Planaires se trouvaient hors de l'eau, elles lâchaient prise et allaient retrouver leur élément liquide.

Jeudi, 5 avril 1894. — Lors de la dernière session, M. le Dr Henri Malagne a lu une note sur *la reviviscence des Rotifères*; dans cette note, l'auteur semble mettre en doute l'existence de cette curieuse propriété. Le R. P. George, S. J., présente quelques remarques à ce sujet.

On sait qu'à certaines époques la poussière des gouttières, examinée au microscope à l'état sec, contient des corps ovoïdes, rougeâtres, qui, sous l'influence d'une goutte d'eau, se développent presque immédiatement et se transforment en de charmants animalcules pleins de vie. Ces animalcules ne sont autre chose que le Rotifère des toits. Quiconque a fait cette observation reste convaincu, jusqu'à preuve péremptoire du contraire, qu'il a assisté au phénomène connu sous le nom de reviviscence. Et pourtant plusieurs naturalistes nient l'existence de cette propriété : d'après eux, ces corps ovoïdes ne seraient que des œufs parvenus à leur complet développement; l'humidité les ferait éclore; l'animal qui aurait une fois joui de la plénitude de ses mouvements périrait irrévocablement par la dessiccation.

Remarquons d'abord qu'on aurait tort de vouloir retrouver cette propriété chez tous les Rotifères indistinctement : elle n'appartient vraisemblablement qu'aux espèces qui vivent dans des milieux alternativement secs et humides, et résulterait de leur adaptation aux conditions mêmes de leur existence. Et pour ces mêmes espèces, s'il est vrai que l'on n'a jamais pu jusqu'à présent observer au microscope la mort apparente par dessiccation d'*un individu isolé* suivie de la résurrection apparente du *même individu* par l'addition d'une goutte d'eau, cela vient sans doute de ce que la dessiccation sur le porte-objet s'effectue dans des conditions tout autres que dans la nature : dans les gouttières des toits, la dessiccation s'opère lentement et à l'abri de l'air, grâce aux poussières qui protègent l'animal; pour trancher la question, il faudrait chercher à reproduire expérimentalement ces conditions. On propose un autre moyen : l'étude anatomique des prétendus œufs. Dans tous les cas, il serait à souhaiter que le problème de la reviviscence de certains animaux, si longtemps

étudié et encore si obscur, reçoive enfin une solution définitive (*).

Le R. P. Hahn fait remarquer qu'il s'agit avant tout de déterminer avec soin la nature des êtres qui entrent en activité par le contact de l'eau. Sont-ce des embryons arrêtés dans leur évolution par la sécheresse, comme les graines, et n'attendant que la présence de l'eau pour arriver à leur développement? Sont-ce des Rotifères complètement constitués, ayant déjà passé par une période d'activité et engourdis temporairement à la suite du manque d'eau? A première vue, il semble que les organismes jeunes, pourvus d'un protoplasme riche en matières solides, soient plus aptes à résister à la dessiccation que les adultes.

M. le Dr H. Matagne, après avoir donné certains détails complémentaires sur les expériences d'Ehremberg et sur l'éclosion des œufs des Rotifères, s'engage à reprendre d'une façon méthodique l'étude de la reviviscence de ces animaux.

M. le comte Adolphe de Limburg-Stirum fait la communication suivante sur *les origines du limon hesbayen.*

Beaucoup d'hypothèses ont été émises pour expliquer l'origine du *loess*, appelé en Belgique limon hesbayen. Aucune d'elles cependant n'est étayée d'arguments suffisants pour entraîner la conviction unanime des géologues. On n'est même pas d'accord, dans les descriptions, sur certains caractères du limon.

(*) Dans la séance du 9 avril dernier de l'Académie des sciences de Paris, M. Milne-Edwards a présenté une note de M. Denis Lance sur un sujet analogue : *La reviviscence des Tardigrades.* L'auteur de cette note a constaté que les espèces qui vivent dans l'eau ne présentent jamais de reviviscence; que chez celles qui vivent dans les endroits alternativement secs et humides, « le phénomène s'observe toujours si l'on a pris soin, pendant la dessiccation, d'opérer cette dernière lentement et de protéger l'animal autant que possible du contact direct de l'air ». Il a suivi sous le microscope le même Tardigrade jusqu'à complète évaporation de la goutte d'eau, l'a retrouvé plusieurs jours après en même place et desséché, et l'a conduit, après restitution de la goutte d'eau, toujours en l'observant sous le microscope, jusqu'à la manifestation des phénomènes vitaux. (Voir *Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, t. CXVIII, n° 15, pp. 317-318.)

Une communication de M. Lohest, du 18 février dernier, à la Société géologique de Liége, contribuera peut-être à éclaircir la question. Ce savant a vu dans le quaternaire, vers la base, des blocs énormes de grès du terrain éocène landénien. D'autres observateurs y avaient déjà constaté leur présence. Les grès semblent former des amoncellements gigantesques dans lesquels le limon se serait déposé. Ils sont évidemment le produit de la destruction sur place du banc de grès existant aux environs.

Les dépôts du loess dans leurs interstices semblent exclure toute action puissante, comme celle des glaciers ou des icebergs, qui auraient pu emporter les blocs de roche. Les conclusions à tirer des observations faites jusqu'ici sous ce rapport tendent donc à faire rejeter les hypothèses glaciaires. Seules, les théories éoliennes ou du ruissellement de MM. de Richtoffen et de Lapparent pourraient se concilier avec les faits observés.

M. le M[is] de Trazegnies donne lecture d'une note relative à un bourgeonnement tératologique de la pomme de terre.

Dans la séance du mois de janvier 1894, à la Société botanique de France, M. Prillieux a fait connaître un fait tératologique observé sur des pommes de terre.

M. Schribaux, professeur à l'Institut agronomique, avait institué une expérience sur des pommes de terre destinées à être plantées, en vue d'empêcher la germination pendant le temps où les tubercules sont conservés en cave.

A cet effet, il avait fait séjourner pendant douze heures environ les pommes de terre dans une dissolution d'acide sulfurique à $^1/_{100}$. Dans cette opération, le tissu subéreux, ou mince couche de liége de la peau de la pomme de terre, en protège l'intérieur, tandis que les germes tendres, exempts de liége, sont rongés par l'acide.

M. Schribaux voulait, par là, éviter le travail de l'éborgnage qui se pratique ordinairement.

Ce procédé, dit M. Poisson, dans un article de *La Nature*, a fort bien réussi, mais quelques-unes des pommes de terre ont présenté le cas anormal suivant : après le traitement, ces tuber-

cules, ne pouvant bourgeonner au dehors, conservèrent néanmoins assez de vitalité pour bourgeonner au dedans, et quelques-uns des bourgeons se transformèrent en petites pommes de terre nouvelles. Le vieux tubercule devint une mère de famille portant sa progéniture en elle.

La jeune plante a donc trouvé dans la pomme de terre-semence en question, non seulement ce que renferment toutes les semences, c'est-à-dire les éléments nécessaires au premier développement de la plante nouvelle, mais même tous les éléments nécessaires au développement presque complet de celle-ci.

Il y a là un fait physiologique assez curieux qu'il m'a semblé intéressant de signaler à la section.

La section vote ensuite la mise au concours de la question suivante : « Donner, au point de vue paléontologique et géologique, la description monographique d'une veine de houille à travers tout un bassin houiller, pour vérifier l'exactitude de la synonymie actuellement reçue. »

Les élections pour le renouvellement du bureau donnent les résultats suivants :

Président,	R. P. Bolsius ;
Vice-Présidents,	M[is] de Trazegnies et M. de Lapparent ;
Secrétaire,	R. P. Van den Gheyn.

Quatrième section.

Mercredi, 4 avril 1894. — M. Meessen lit un travail qui a pour titre : ***Du diagnostic du carcinome au point de vue histologique.***

Ce travail paraîtra *in extenso* dans la 2e partie.

La communication de M. Meessen est suivie d'une proposition de M. Cuylits au sujet de l'étude de questions actuelles. Il en soumet deux à l'appréciation de ses collègues : l'une est rela-

tive au travail de huit heures, l'autre concerne la composition de l'eau de la Meuse et l'usage éventuel de ce liquide au point de vue de la consommation et des besoins de l'hygiène. Notre honorable Président est chargé du choix de spécialistes pour l'étude de ces questions.

M. Goris expose ensuite un cas de résection du maxillaire supérieur.

Les dangers d'hémorragie ont fait rejeter par beaucoup d'opérateurs l'emploi de l'anesthésie. M. Goris est partisan de l'anesthésie précédée de la ligature de la carotide externe. Et d'abord il insiste, à propos de la technique de cette opération préliminaire, sur des particularités qui doivent nous empêcher de confondre les deux carotides.

Quant à l'opération fondamentale, pourquoi, demande M. Goris, faut-il, comme l'ont fait d'éminents chirurgiens, inciser sur la ligne médiane et donner lieu par conséquent à des cicatrices fort apparentes?

M. Goris préfère conduire ses incisions dans les sillons naso-jugal et sous-orbitaire : celles-ci permettent d'obtenir des cicatrices peu visibles et respectent beaucoup mieux que l'incision médiane la conformation naturelle de la face. On forme d'ailleurs de la sorte un lambeau cutané dont le renversement laisse toute liberté de résection à la gouge et au maillet.

M. Goris présente à la section un maxillaire supérieur envahi par un néoplasme malin et dont l'ablation, malgré la ligature préalable de la carotide externe, donna lieu à une hémorragie mortelle. La tumeur avait envahi la veine jugulaire interne qui se déchira fatalement pendant l'opération. C'est là un accident qu'il était impossible de prévoir et de prévenir.

M. Goris nous entretient encore d'une opération récemment mise en honneur par MM. Poncet et Jaboulay, de Lyon : l'exothyropexie, qui consiste à mettre à nu le corps thyroïde et à le laisser exposé à l'influence de l'air pour en amener l'atrophie.

Notre collègue eut l'occasion de pratiquer une semblable opération suivie d'abord d'un résultat satisfaisant, mais qu'il fut

obligé de compléter ensuite par la thyroïdectomie pour remédier à la gêne circulatoire qui n'avait pas tardé à se déclarer. Une grande amélioration s'ensuivit aussitôt, mais néanmoins la malade succomba peu après à une pneumonie dont la genèse n'a pu être entièrement élucidée.

Cette communication donne lieu à de judicieuses remarques de M. le professeur Lefebvre sur le traitement du goitre exophtalmique. Il l'a vu plusieurs fois s'améliorer ou guérir spontanément; et dans un cas, l'emploi de la digitale lui a été manifestement d'un précieux secours.

Le Bureau actuel est maintenu pour l'exercice de l'année qui commence.

Cinquième section.

—

Jeudi, 5 avril 1894.— Le premier objet à l'ordre du jour était le renouvellement du bureau. Malgré les instances de l'assemblée, Mgr Nicotra, Auditeur de la Nonciature apostolique, n'accepte pas le renouvellement de son mandat : la charge à laquelle il vient d'être appelé, dit-il, ne lui laisse pas de suffisants loisirs à consacrer à la Société scientifique. L'assemblée, après avoir exprimé ses regrets à Mgr Nicotra, forme son bureau de la manière suivante et à l'unanimité des voix :

Président :	M. le Cte Fr. van der Straten Ponthoz.
Vice-Présidents :	MM. Alph. de Marbaix
	et Éd. Van der Smissen.
Secrétaire :	M. Armand Julin.

La parole est donnée à M. Julin pour une communication sur la grève récente des ouvriers carriers de Sprimont (province de Liége). Voici l'analyse de ce travail :

« La grève de Sprimont ne peut être comptée parmi les grands événements sociaux qui font époque, marquant une date

dans l'évolution sociale, mais elle est intéressante par les tendances qui s'y sont révélées et par la façon dont elle a pris fin.

Les causes de la grève sont nombreuses; la plus apparente a été la violation par les patrons d'une disposition de la loi du 16 août 1887, prescrivant de payer les salaires journaliers ne dépassant point 5 francs, à seize jours d'intervalle au plus ; les ouvriers, à cette occasion, protestèrent, formèrent des rassemblements sur les chantiers et finalement se mirent en grève. Mais ce grief disparut rapidement; il en est d'autres qui, plus importants, ne purent être écartés qu'après de longues et laborieuses négociations.

La grève durait depuis deux mois, lorsqu'un membre du Conseil supérieur du travail demanda la nomination d'un arbitre par le Gouvernement. M. le Ministre de l'Agriculture désigna, en qualité de commissaire du Gouvernement, pour assister à la séance du Conseil de l'industrie et du travail de Sprimont, M. le duc d'Ursel, sénateur et président du Conseil supérieur du travail. C'est grâce à l'intervention de M. le duc d'Ursel que la grève de Sprimont a pris fin.

La cause essentielle de cette grève se trouve dans la transformation de l'industrie de Sprimont, celle des carriers. Longtemps elle ne fut qu'une petite industrie; actuellement, grâce à l'impulsion qui lui a été donnée et aux capitaux qui y ont été engagés, elle est devenue une grande industrie. Avec la modification des procédés de travail, des coutumes nouvelles s'implantèrent, et il fallut un jour que les patrons édictassent un règlement d'ordre intérieur. Les ouvriers se virent par là privés d'une certaine liberté dont ils jouissaient auparavant; de là vint, en partie, leur mécontentement.

Les patrons profitèrent de ces changements pour introduire des modifications dans le mode de distribution du travail. Depuis l'origine de l'exploitation des carrières, les pierres à tailler étaient mises à la criée, c'est-à-dire que les ouvriers, se présentant dans un ordre convenu entre eux, prenaient à façon les pierres à tailler après un débat public avec le patron sur le prix de leur travail.

Les maîtres de carrières voulaient être libres de remettre les pierres aux ouvriers de leur choix, d'après la capacité de ceux-ci. Les raisons qu'ils invoquaient pour justifier ce changement étaient toutes d'ordre économique : leur principal argument consistait à faire valoir que, dans le régime de la criée, certains travaux devaient être confiés à des ouvriers incapables de les mener à bien.

Les ouvriers faisaient la plus grande résistance à ce changement en invoquant des raisons d'ordre social, dont la principale était que la remise de la main à la main causerait, parmi les ouvriers, des rivalités contraires à la bonne entente nécessaire au maintien des œuvres économiques et sociales ouvrières établies à Sprimont (syndicat, coopérative de consommation, coopérative de production, société de secours mutuels).

Le souci que montraient les ouvriers de maintenir intacts tous les détails de leur organisation économique est très caractéristique. Il se retrouve partout à la première période du développement des organismes professionnels. Certains patrons avaient donné lieu par leur attitude intransigeante à des soupçons d'hostilité envers ces institutions ouvrières. Ainsi l'exagération du taux des amendes comminées par le nouveau règlement patronal venait peut-être du désir de faire acte d'autorité vis-à-vis du syndicat ouvrier.

Ce syndicat, d'autre part, émettait des prétentions injustifiables. Il en était ainsi lorsqu'il prétendait régler seul l'ordre des travaux sur les chantiers et substituer à l'autorité patronale celle de délégués choisis par lui.

Il fallait remettre toute chose à sa place. C'est à quoi s'est appliqué M. le duc d'Ursel, et il y a admirablement réussi. En premier lieu, il obtint des patrons un engagement formel de ne pas faire de l'affiliation au syndicat ouvrier une cause de renvoi des chantiers.

Les ouvriers, par contre, abandonnaient leur prétention de régler l'ordre des travaux sur les chantiers. Les maîtres de carrières reviseraient certaines dispositions trop rigoureuses du règlement d'ordre intérieur, à condition que les ouvriers reti-

rassent des statuts de leur syndicat tous les articles ayant un caractère hostile aux patrons.

Malgré de longues négociations, l'accord ne put s'établir sur la question de la criée des pierres. M. le duc d'Ursel rendit sur ce point une sentence arbitrale portant que 60 °/₀ de la production, dans chaque carrière, seraient mis à la criée et 40 °/₀ remis de la main à la main; l'exécution de cet arrangement devait être constaté par l'examen des livres des industriels. Après quelques hésitations, cette sentence a été exécutée ponctuellement et a mis fin à la grève. »

M[gr] Nicotra adresse des félicitations à M. Julin pour le travail intéressant dont il vient de donner lecture.

Un membre propose d'adresser une lettre de félicitation à M. le duc d'Ursel pour son heureuse intervention dans la grève de Sprimont. Cette motion est votée par acclamation. Le bureau est chargé d'y donner suite.

Une discussion s'engage sur différents points soulevés par la communication de M. Julin; y prennent part : M[gr] Nicotra, M. le C[te] van der Straten Ponthoz, M. Thiébauld, M. Lagasse, M. Van der Smissen et M. Julin.

L'assemblée aborde ensuite le troisième objet mis à son ordre du jour.

M. Van der Smissen expose quelques vues sur les conséquences de la baisse de l'argent quant au prix des produits agricoles (*).

Tous les membres prennent part à la discussion.

*
* *

(*) Voir le mémoire intitulé : *La Question monétaire et la crise agricole en Belgique*, par MM. Thiébauld, Van der Smissen et Julin. (Bulletin de l'Agriculture du Ministère de l'Agriculture, de l'Industrie et des Travaux publics, Bruxelles, 1894.)

Le bureau, conformément à la décision de l'assemblée, ayant adressé une lettre de félicitation à M. le duc d'Ursel, a reçu la réponse suivante :

« Monseigneur,

» J'ai reçu la lettre par laquelle, en votre qualité de président de la cinquième section de la Société scientifique, vous voulez bien apprécier, dans des termes beaucoup trop flatteurs, mon intervention dans l'apaisement d'une grève récente à Sprimont.

» L'impression dominante que j'ai rapportée de cette expérience, nouvelle en Belgique, est que les explications franches et loyales entre patrons et ouvriers sont ce qui manque le plus dans leurs rapports tels qu'ils sont organisés aujourd'hui, et que l'effort des amis de la paix sociale doit se porter tout d'abord sur le moyen de les faciliter. Je n'ai pas très grande confiance dans la conciliation organisée administrativement ; quand un conflit est porté librement par les parties devant un tribunal de conciliation, c'est que celle-ci est virtuellement faite et acceptée en principe. L'intervention administrative est alors presque inutile. Quand le conflit y est porté d'office, la sentence manque le plus souvent de sanction et il reste irréductible. Il n'en est pas tout à fait de même de l'arbitrage, car ici la sanction peut se trouver, dans une certaine mesure, dans l'acceptation préalable des parties et même dans la publicité donnée à la sentence.

» J'ai eu la grande satisfaction de faire prévaloir, à Sprimont, deux principes qui me tenaient également à cœur : 1° le droit reconnu aux ouvriers de se syndiquer pour la défense de leurs intérêts professionnels ; 2° le droit pour les patrons de rester maîtres de la discipline de leurs chantiers et d'introduire toutes les dispositions et les procédés propres à faire progresser leur industrie. S'il reste quelque chose de cette expérience, ce sera cela.

» Veuillez agréer, Monseigneur, avec l'expression de ma vive reconnaissance pour votre si aimable initiative, l'hommage de ma plus respectueuse considération.

» Le duc d'Ursel. »

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES.

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 3 AVRIL 1894.

Présidence de M. L. Henry, *président*.

M. P. Mansion, secrétaire général de la Société pendant l'année 1893-1894, donne lecture du rapport suivant :

Messieurs,

Pendant l'année qui vient de s'écouler, la *Société scientifique de Bruxelles* a publié les tomes XVI et XVII de ses *Annales* et quatre livraisons de la *Revue des questions scientifiques.*

Il n'est pas sans intérêt de comparer la part que prennent les travaux des diverses sections dans les deux volumes des *Annales* dont il vient d'être question.

	Tome XVI.	Tome XVII.	Total.
	Pages.	Pages.	Pages.
1re section	215	300	515
2e —	105	30	135
3e —	125	35	160
4e —	25	60	85
5e —	5	20	25
	475	445	920

Comme vous le voyez d'après ces chiffres, nos volumes sont affectés d'une hypertrophie mathématique. La cause en est évidente : les recherches d'analyse et de géométrie sont plus faciles à instituer que des expériences de physique ou de chimie, ou que des observations relatives aux sciences naturelles et médicales.

Malgré cette inégalité inévitable, au point de vue de la productivité scientifique, entre les diverses classes de travailleurs, il nous semble désirable, dans l'intérêt de nos lecteurs, que les

diverses sections se partagent à peu près également les quatre à cinq cents pages dont nous disposons chaque année : les mathématiques sont trop arides et trop abstraites pour qu'elles aient le droit d'y occuper une place prépondérante.

Nous faisons donc un nouvel appel aux physiciens et aux chimistes, aux naturalistes et aux médecins, pour qu'ils nous communiquent de plus en plus le fruit de leurs travaux. Nous nous adressons aussi aux membres de la cinquième section, réorganisée depuis deux ans, et nous exprimons le vœu qu'ils enrichissent nos *Annales* de mémoires relatifs à l'économie sociale et à l'agriculture.

Il est inutile et d'ailleurs impossible d'analyser, même d'une manière superficielle, les 1400 pages de la *Revue* publiées depuis un an par la Société (*). Qu'il nous soit permis seulement de vous signaler quelques articles d'une portée philosophique, dus à MM. Duhem et Vicaire. Ces articles ont appelé sur notre *Revue* l'attention des métaphysiciens et ont donné lieu à des discussions intéressantes dans des recueils justement estimés. Les *Annales de philosophie chrétienne* ont reproduit *in extenso* les vues opposées de nos savants confrères sur la portée et l'im-

(*) Contentons-nous de donner une liste des principaux articles : MOELLER, L'Influenza. — D. LE HIR, De Quatrefages et l'anthropologie. — F. FOLIE, L'Invariabilité de la hauteur du pôle opposée aux variations de latitude. — E. VICAIRE, De la valeur objective des hypothèses physiques. — A.-A. FAUVEL, Le Grand paquebot moderne. — F. VAN ORTROY, L'OEuvre géographique de Mercator. — E. DESJOBERT, Causerie d'un forestier. — J. THIRION, Hommage rendu à la mémoire de Gilbert. — X., Le Jubilé épiscopal de S. S. Léon XIII et la Société scientifique de Bruxelles. — CH. DE KIRWAN, Comment finira l'Univers. — P. DUHEM, Physique et métaphysique. — AGRICOLA, Les Hôtes de mon talus. — J. VAN DEN GHEYN, Les Races et les langues. — A.-A. FAUVEL, Les Combustibles minéraux de l'Insulinde. — E. DESJOBERT, La Forêt de Civrais. — P. DUHEM, L'École anglaise et les théories physiques. — M[is] DE NADAILLAC, Le Préhistorique américain. — A. DE LAPPARENT, Les Causes de l'ancienne extension des glaciers. — G. HAHN, La Transmission de l'influx nerveux dans l'organisme. Échec infligé aux anciennes théories. — J. CASTETS, Les Abeilles du sud de l'Inde. — L. SIRET, L'Espagne préhistorique. — J. THIRION, Deux passages curieux d'un livre oublié. — J. PANTEL, Les Nids composés et les colonies mixtes des fourmis. — DEBAISIEUX, Les Grands progrès de la chirurgie contemporaine. — J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, L'Inlandsis du Groenland. — J. THIRION, Le Courant électrique. — H. PRIMBAULT, Les Engrais chimiques. — ÉD. VANDERSMISSEN, La Question monétaire envisagée au point de vue théorique. — CAMBOUÉ, Les Araignées et leur venin. — LE MÊME, Notes sur Madagascar.

portance des hypothèses physiques ; un autre de nos membres, d'une compétence exceptionnelle en philosophie, M. le comte Domet de Vorges, a donné son avis à ce sujet dans les mêmes *Annales*. Dans les numéros de janvier et de mars 1894 de la *Revue thomiste*, récemment fondée à Paris, le R. P. Lacome l'a traitée à son tour. Grâce à ces divers travaux, l'importante question soulevée par M. Duhem dans un premier article publié par la *Revue*, en 1892, paraît à peu près complètement élucidée, et les vues des divers champions qui sont entrés en lice semblent moins divergentes qu'elles ne paraissaient au premier abord.

Comme les années précédentes, c'est le R. P. George, S. J., secrétaire adjoint de la Société, qui a publié les quatre livraisons de notre *Revue* qui ont paru depuis avril dernier; il a pris une part très grande également à la publication des *Annales*. Nous le remercions de tout cœur, au nom de la Société scientifique et en notre nom propre, du zèle qu'il apporte à cette tâche ingrate.

La session d'octobre 1893 de la Société scientifique s'est tenue à Namur, où nous avons été accueillis de la manière la plus gracieuse et la plus hospitalière. Le matin, le Cercle catholique, la Policlinique et le Collège Notre-Dame de la Paix ont abrité les travaux de nos cinq sections. L'après-midi, les membres de la Société ont pu visiter, sous la direction de son savant conservateur, M. Bequet, le Musée archéologique de Namur, si remarquable au point de vue des richesses qu'il contient et de l'ordre rigoureusement scientifique dans lequel elles sont rangées. L'assemblée générale eut lieu, en présence de l'élite de la société namuroise, dans les salons de l'hôtel provincial, mis gracieusement à notre disposition par M. le Gouverneur de Namur. M. de Montpellier avait pris place au bureau, ainsi que Mgr Delogne, vicaire-général, représentant S. G. Mgr Decrolière, le révérendissime évêque de Namur, qui était en tournée pastorale et n'avait pu assister à la séance. Après une brillante conférence de M. le professeur Debaisieux *Sur les grands progrès de la chirurgie moderne*, notre président a exprimé les sentiments de tous

les membres de la Société, en remerciant tous ceux qui ont contribué au succès de la session. Nous sommes heureux en ce jour de renouveler ces remerciements à nos aimables hôtes de Namur et de leur promettre de revenir dans leur ville aussitôt que nous le pourrons.

L'année 1893 a été, pour les catholiques du monde entier, l'année du Jubilé épiscopal de Sa Sainteté Léon XIII. Le Conseil de la Société scientifique a cru qu'il était de son devoir, à cette occasion, d'envoyer de nouveau à notre Saint Père le Pape l'expression de son filial attachement au Saint-Siége et à la personne de l'auguste Pontife.

Dans sa séance du 22 juin, il a voté une adresse qui a été remise, le 1er juillet, à Son Excellence le Nonce apostolique près Sa Majesté le Roi des Belges, Mgr Nava di Bontifè, pour qu'il voulût bien la transmettre à Sa Sainteté.

L'adresse ayant été immédiatement envoyée à Rome, Son Éminence le Cardinal Rampolla, secrétaire d'État, a daigné répondre au président de la Société scientifique, dès le 8 juillet, par une lettre encourageante, dont on trouvera le texte, en même temps que celui de l'adresse, en appendice à ce rapport.

Le contenu de cette lettre, comme l'a fait remarquer Mgr Nava di Bontifè en la transmettant au président de la Société, ainsi que l'empressement que Son Éminence le Cardinal Rampolla a mis à répondre, sont des preuves manifestes que l'adresse faite au nom de la Société a été agréable à Sa Sainteté Léon XIII.

Pendant l'année qui vient de s'écouler, un de nos membres les plus éminents, M. Gustave Dewalque, professeur à l'Université de Liége et membre de l'Académie royale de Belgique, a été élevé au grade de Commandeur de l'Ordre de Léopold. Cette haute distinction accordée à notre confrère a été l'occasion d'une belle manifestation organisée par ses élèves et ses amis. Le Conseil de la Société a écrit une lettre à M. Dewalque où il lui a exprimé la part que nous prenons tous à cette fête en

l'honneur du savant géologue qui a pu porter sans fléchir le nom glorieux de successeur d'André Dumont.

Nous nous sommes associés également, le 13 novembre dernier, aux fêtes du quarantenaire de la Société centrale d'agriculture, dont plusieurs membres des plus distingués comptent parmi les fondateurs de la Société scientifique de Bruxelles. Nous avons été heureux en ce jour d'adresser toutes nos félicitations à celui qui personnifie si bien la Société centrale, à son vénéré président, M. le comte François van der Straten Ponthoz, et à ses dignes collaborateurs.

Diverses distinctions, que nous pouvons d'autant moins passer sous silence qu'elles n'ont pas encore reçu la publicité qu'elles méritent, ont été accordées à plusieurs de nos membres.

M. Domet de Vorges, qui a été notre président pendant l'année 1890-1891, a reçu du Saint-Père le titre héréditaire de Comte romain pour ses travaux de philosophie thomiste : *In philosophia Divi Aquinatis altius perscrutanda.* M. Amagat, correspondant de l'Institut de France, que nous comptons, depuis novembre dernier, au nombre de nos membres honoraires, et M. G. Lemoine, notre président pendant l'année 1888-1889, ont obtenu le prix La Caze dans la séance du 26 décembre de l'Académie des sciences de Paris : M. Amagat pour ses études sur les gaz et les liquides soumis à de hautes pressions, M. Lemoine pour l'ensemble de ses recherches de chimie et spécialement sur les équilibres chimiques (*).

De pareilles distinctions sont avant tout un honneur pour ceux qui les ont méritées par leurs travaux; mais cet honneur rejaillit, dans une certaine mesure, sur la *Société scientifique de Bruxelles*, à laquelle ils ont bien voulu donner leur nom et leur dévouement. Vous vous associerez donc bien volontiers, je n'en

(*) Nous aurions dû signaler, l'an dernier, des distinctions semblables accordées à M. d'Ocagne, pour ses écrits sur la nomographie; à M. G. Humbert, pour ses recherches relatives à la théorie des fonctions abéliennes et leur application à la théorie des surfaces. Nous sommes heureux de réparer aujourd'hui cet oubli.

doute pas, aux félicitations que j'adresse aujourd'hui à MM. de Vorges, Amagat et Lemoine.

Pendant l'année qui vient de s'écouler, le nombre total des membres de la Société a diminué de treize. Au moment de terminer l'impression du tome XVI des *Annales*, nous en comptions 432 ; nous n'en comptons plus que 419, au moment de la publication du tome XVII. Cependant, depuis un an, nous avons admis une trentaine de nouveaux membres. Malheureusement nous avons un nombre égal ou supérieur de démissions à enregistrer. En outre, la mort nous en a enlevé douze au moins depuis un an, et parmi eux quelques-uns étaient des ouvriers de la première heure, qui avaient publié dans nos *Annales* d'intéressants travaux. Nous adressons un adieu sympathique à ces amis et confrères qui nous ont quittés, en souvenir de leur zèle persévérant et de leur dévouement à la noble cause de l'union de la science et de la foi.

Le nombre trop élevé de nos démissions annuelles crée à la longue une situation difficile à la Société scientifique de Bruxelles. Dès maintenant, ce n'est qu'à grand peine que nous parvenons à équilibrer notre budget. On se fait quelquefois illusion sur l'état financier de la Société, parce que l'on ne songe pas à la vraie étendue de ses charges permanentes. Les cotisations de nos membres et le revenu du capital inaliénable souscrit par les membres fondateurs et les membres à vie suffisent tout au plus à payer les frais d'organisation des sessions et de publication des *Annales* et du *Bulletin*. La *Revue* absorbe toutes nos autres ressources, et même nous devrons, dès cette année, en réduire, dans une certaine mesure, les frais de rédaction, pour parvenir à équilibrer notre budget.

En présence de cette diminution du nombre de nos membres et de la situation financière qui en résulte, la nécessité d'une propagande plus active en faveur de la Société et de la *Revue* s'impose à chacun de nous.

Dans sa récente Encyclique sur *les Études bibliques*, Sa Sainteté Léon XIII adresse aux catholiques des conseils qui s'appliquent

parfaitement à notre situation présente et semblent écrits tout exprès pour recommander la Société scientifique de Bruxelles à ceux que la Divine Providence a comblés des biens de la fortune ou du talent. Qu'il me soit permis, pour terminer, de vous lire et de soumettre à vos méditations ces conseils de la plus haute autorité qui soit ici-bas :

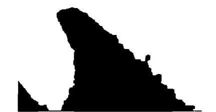
« Lutter pleinement et parfaitement pour la défense de la » sainteté des Écritures, dit le Saint-Père, avec le secours de » toutes ces sciences difficiles, c'est une œuvre beaucoup trop » considérable pour qu'on puisse en attendre la réalisation du » zèle des seuls commentateurs et théologiens. Il faut désirer » qu'ils y contribuent et qu'ils s'y appliquent aussi, les catho- » liques qui ont acquis quelque célébrité dans les sciences pro- » fanes... Rien ne peut mieux persuader à la société de rendre » hommage à la vérité, que de la voir professée hardiment par » ceux qui se distinguent dans quelques branches illustres des » sciences.

» La haine même des détracteurs reculera facilement, ou du » moins ils n'oseront plus aussi témérairement dénoncer la foi » comme ennemie de la science, quand ils verront les gloires » mêmes de la science apporter à cette foi l'hommage de leur » respectueuse adhésion.

» Donc, puisque la religion peut recevoir tant d'avantages de » ceux à qui la Providence s'est plu à accorder ces dons heu- » reux de l'esprit avec la grâce de la foi catholique, que chacun, » au milieu de cette mêlée ardente des sciences qui touchent » par quelque côté les Écritures, s'assigne un genre d'étude » approprié, dans lequel, une fois passé maître, il puisse » repousser, non sans gloire, les traits dirigés contre elle par la » science ennemie.

» Il nous est doux de louer ici, comme il le mérite, le dessein » de certains catholiques qui, pour qu'il ne manque aux savants » qui se livrent à ces sortes d'études rien des secours néces- » saires à les développer, s'unissent pour y appliquer leurs lar- » gesses.

» C'est là certainement un emploi excellent et très opportun



» de la fortune; car moins les catholiques peuvent espérer des » subventions officielles pour leurs travaux, plus il convient que » soit empressée et abondante la libéralité des souscriptions » privées. Qu'ils consacrent à la défense du trésor de la doctrine » révélée par Dieu les richesses dont ils ont été favorisés par » ce Dieu même. »

Il est ensuite donné lecture du rapport sur la situation financière de la Société. MM. Lagasse-de Locht et Goedseels sont nommés pour l'examiner. L'assemblée décide que c'est à la session d'octobre seulement qu'il sera statué définitivement sur ce rapport et sur ceux des commissaires.

M. Van der Mensbrugghe fait une savante et spirituelle lecture intitulée : *Quelques pages de l'histoire d'un grain de poussière.* Il fait assister ses auditeurs aux migrations de ce grain de poussière dans les appartements, dans les établissements industriels, dans les mines de houille, dans l'atmosphère; il en expose les bienfaits et les méfaits, beaucoup plus nombreux, les uns et les autres, qu'on ne pourrait le croire, et termine par une péroraison émue et élevée où il fait connaître les harmonies providentielles que présente l'histoire de cet humble grain de poussière.

Voici un résumé de cette conférence, qui sera publiée *in extenso* dans la *Revue des questions scientifiques.*

L'auteur rappelle qu'il y a près de quatorze ans, il a tâché de décrire les principaux exploits d'une gouttelette d'eau, et de montrer que l'origine de la puissance de celle-ci, c'est précisément sa petitesse; il se propose maintenant d'exposer quelques épisodes de l'histoire d'un héros, minuscule comme sa consœur liquide, mais détaché d'un corps solide quelconque, savoir d'un humble grain de poussière.

Il débute comme suit : « Hé quoi, dira-t-on, est-il possible » de porter tant d'intérêt aux corpuscules de tout genre consti- » tuant la poussière, et de les considérer autrement que comme » des visiteurs malpropres, toujours gênants, parfois même » dangereux, et qui inspirent à tout le monde une répugnance

» plus ou moins vive? Avec quel plaisir nous voyons-nous
» débarrassés de la poussière qui recouvre nos meubles, nos
» livres, nos appartements! Nous soucions-nous jamais du sort
» qui attend ces millions et milliards d'hôtes microscopiques,
» une fois qu'ils ont été congédiés et lancés dans l'atmosphère
» ou sur la voie publique? Tous ces êtres, souvent invisibles
» isolément, n'ont-ils pas pour suprême destinée d'aller, comme
» dit le poète,

Où va la famille de rose
Et la feuille de laurier?

» Pauvre grain de poussière! Si Dieu te donnait le pouvoir
» de répondre toi-même à tes ennemis, à tes détracteurs, à tous
» ceux qui, par ignorance ou par dédain, méconnaissent tes
» qualités, tes services, comme tu saurais confondre leur fol
» orgueil ou leur coupable insouciance! Avec quelle clarté tu
» expliquerais les fonctions multiples que tu remplis ici-bas pour
» le bien-être de l'humanité, partout où l'on respecte les lois de
» la prudence et de l'hygiène! Mais tu préfères te livrer en tous
» lieux à ton incessante activité, en gardant, hélas! le secret de
» ta puissance! »

M. V. D. M. se demande alors jusqu'à quel point les poussières sont répandues partout; il signale les particules innombrables qu'on observe sur le trajet des rayons solaires qui pénètrent dans un appartement; sans les myriades de ces parcelles minuscules, le trajet des rayons lumineux serait totalement invisible en dehors de leur direction même.

L'auteur répond alors aux questions suivantes : Comment se fait-il que, dans nos demeures, il y ait tant et tant de grains de poussière, même alors que nous veillons au maintien d'un état de grande propreté? Pourquoi, malgré les soins les plus minutieux, le nettoyage est-il à recommencer tous les jours?

Il rappelle, en premier lieu, le nombre considérable de parcelles solides qui s'élèvent ou se déplacent au moindre mouvement imprimé à un meuble ou à notre propre corps : de là l'origine de ces petits assemblages de poussière qu'on trouve particulièrement sous les meubles et dans les coins.



Une deuxième cause du développement rapide de poussière, c'est l'éclairage : il suffit d'allumer une lampe ou un bec de gaz dans une chambre, pour que, en un temps très court, il y ait des centaines de fois plus de poussière qu'auparavant; cela provient de la combustion d'un gaz ou d'une huile quelconque, combustion qui lance dans l'air des milliards de corpuscules invisibles séparément, mais dont la présence est accusée par leur dépôt sur toutes les surfaces du milieu ambiant.

A propos des colonnes d'air chaud qui circulent dans une grande salle éclairée par de nombreux becs de gaz, l'auteur cite une expérience curieuse faite il y a quelques années dans un théâtre pendant une représentation à laquelle assistait une foule compacte : comme la température de l'air extérieur était fort basse, la vapeur d'eau développée par la respiration de tant de personnes se condensait d'une manière continue sur une fenêtre placée à la partie supérieure de la salle; la condensation était si rapide et si abondante que l'eau ruisselait du bas de la fenêtre, et pouvait être recueillie dans un réservoir convenablement disposé; un observateur a pu ainsi remplir aisément un petit flacon du liquide condensé. Le lendemain, il a soumis au microscope une goutte de ce liquide, et y a constaté la présence de brins de soie, de laine, de coton, de pellicules, de fragments de cheveux, etc., en même temps que d'une infinité d'animalcules dont les plus petits étaient dévorés par les plus gros; au bout de quatre ou cinq jours, il n'a pu apercevoir que des parcelles inertes.

Une troisième cause de circulation de poussière est le chauffage : tout le monde connaît le dépôt plus ou moins foncé qui se forme au bout de quelque temps sur le plafond, immédiatement au-dessus des poêles ou calorifères, ou bien dans le voisinage des conduites où circule de l'air chaud.

Pour atténuer les inconvénients de la poussière dans les appartements, il est utile de recourir à des linges mouillés auxquels s'attachent les corpuscules, tandis que le nettoyage à sec soulève des nuages de parcelles qui recouvrent ensuite en partie les objets déjà nettoyés.

M. V. D. M. donne ensuite une idée de la ténuité extraordinaire de certaines poussières, et de la promptitude avec laquelle elles se transportent d'un partie d'une enceinte à une autre. On a prouvé qu'il suffit d'un trois-millionième de milligramme de sodium pour que la raie jaune caractéristique de cette substance apparaisse au spectroscope : c'est sans doute à cause de cette excessive exiguïté que l'instrument de Bunsen et Kirchhoff accuse la présence de poussières de différentes substances, aussitôt après qu'on a épousseté un livre dans l'endroit de l'enceinte le plus éloigné de l'observateur.

Après avoir signalé ces résultats bien modestes de l'activité incessante du grain de poussière, M. V. D. M. tâche de faire comprendre comment l'association des poussières par légions innombrables peut devenir très puissante et fort dangereuse.

Il rappelle successivement une série d'explosions et d'incendies qui ont détruit différents moulins à farine, une fabrique où l'on pulvérisait du soufre, une fabrique d'engrais, une brasserie, des raffineries de sucre; comme cause de ces désastres, on a été toujours tenté d'invoquer non pas quelque propriété spéciale des poussières combustibles et bien sèches, mais l'explosion d'un gaz ou d'une vapeur quelconque. C'est cette fausse idée qui a été combattue victorieusement par M L. Peck, à la prière des meuniers de Minneapolis, que les désastres de leurs confrères américains avaient jetés dans une réelle et bien légitime épouvante : il a fait voir, par des expériences fort démonstratives, qu'une poudre fine et sèche répandue dans une enceinte et mise en contact avec une flamme a la propriété de propager la conflagration avec la même vitesse qu'un gaz inflammable, et que cette combustion presque simultanée de milliards de parcelles organiques produit une chaleur assez intense pour que l'air ne puisse se dilater qu'avec une véritable explosion.

Voici l'expérience la plus simple décrite par l'habile expérimentateur américain : sur une table on place deux planchettes l'une contre l'autre, de manière qu'elles forment un angle aigu et que l'arête d'intersection soit verticale; vers le bas de celle-ci, et à l'intérieur de l'angle, on dépose un petit tas de poussière très fine,

par exemple celle qu'on peut détacher d'un banc de menuisier ; à l'extérieur de l'angle et près de l'arête, on place un brûleur à gaz de Bunsen. Cela étant, on allume celui-ci, puis à l'aide d'un soufflet ordinaire on soulève un petit nuage de la dite poussière ; aussitôt elle prend feu, en répandant une chaleur fort intense et produisant une colonne enflammée de plus de 5 mètres de hauteur. — Même effet avec le sucre, l'amidon, la farine, etc. En ce qui concerne les explosions dans les mines de charbon, il n'y a donc pas lieu de s'étonner de ce que, d'après les conclusions tant de la Commission anglaise des accidents (1879-1886) que de la Commission allemande du grisou (1881-1885), la poussière fine et sèche de charbon peut, même en l'absence du grisou, provoquer de grandes et violentes explosions ou propager la flamme sur des étendues considérables.

Dans la deuxième partie de sa lecture, M. V. D. M. signale le rôle vraiment grandiose joué par les grains de poussière dans l'économie générale de la nature.

Après avoir brièvement montré la grande diversité des poussières répandues dans l'atmosphère, il insiste sur une propriété très curieuse des corpuscules en général et spécialement étudiée par un physicien anglais, M. Aitken : elle consiste en ce que de l'air contenant de la poussière donne un épais nuage de vapeur condensée, dès que cet air communique avec une source de vapeur invisible, tandis que de l'air parfaitement débarrassé de corpuscules solides demeure tout à fait transparent dans les mêmes circonstances.

M. Aitken explique ce fait en disant que la vapeur se dépose aisément sur une surface fraiche ; mais M. V. D. M. préfère invoquer une loi découverte par lord Kelvin, et d'après laquelle la vapeur se condense d'autant plus vite sur un corps solide que la surface de celui-ci offre un plus grand nombre de très petites ouvertures, de raies, de stries, comme c'est le cas pour les grains de poussière. De là des luttes incessantes entre les particules de vapeur d'eau d'une part, et les parcelles de poussière de l'autre.

M. V. D. M. s'efforce de faire assister les auditeurs à la forma-

tion de deux armées immenses où le nombre et l'excessive petitesse des combattants défient également nos calculs. Il décrit ensuite, de la manière suivante, les péripéties d'une des batailles engagées très fréquemment dans la bande équinoxiale de l'Amérique du Sud.

« Transportées par les vents alizés, les troupes de grains de » poussière et de particules de vapeur invisibles, entremêlées » de la façon la plus irrégulière, traversent l'espace qui s'élève » au-dessus des plaines à la fois si chaudes et si humides » du Brésil; en route, les cohortes de vapeurs se renforcent » de toutes les particules provenant de l'évaporation des nombreux cours d'eau; aussi longtemps que la marche est libre » et la température suffisamment élevée, les immenses traînées de voyageurs sont poussées incessamment vers l'ouest; » mais voici qu'au loin se montrent les têtes menaçantes des » Cordillères des Andes : dans le voisinage de cet obstacle » inébranlable, les combattants éprouvent des chocs violents » et sont forcés de s'élever le long des flancs des hautes montagnes qui se dressent devant eux. Dans ce désordre effroyable, » l'air au milieu duquel s'agitent tous nos héros, se dilate et se » refroidit de plus en plus; bientôt la température devient » tellement basse que les particules de vapeur cessent d'être plus » longtemps invisibles; elles se lancent avec impétuosité dans les » creux des grains de poussières; il se développe ainsi, en un » temps parfois très court, d'épais nuages formés de millions et » de milliards de gouttes toutes électrisées de la même manière; » à cause des répulsions mutuelles de ces gouttes, le nuage se » dilate, l'air interposé se refroidit et dès lors les gouttelettes les » plus petites s'évaporent avec une rapidité telle qu'elles se » congèlent. Si ces phénomènes se passent entre deux nuages » superposés, il jaillit bientôt entre eux des éclairs, le tonnerre » gronde, à l'instant même a lieu une nouvelle condensation de » vapeur et la pluie tombe par torrents. Mais alors les immenses » veines liquides traversant l'atmosphère à peu près du haut en » bas, entraînent avec elles de grandes quantités de gaz, ce qui » détermine un violent appel d'air très froid des régions supé-



» rieures au foyer même de l'orage; cet air froid où flottent
» presque toujours une infinité de très fines aiguilles de glace
» provoque de nouvelles condensations dans les couches aériennes
» venues des portions latérales; de là des vents violents qui
» changent à tout moment de direction et qui peuvent entretenir
» parfois très longtemps les phénomènes orageux.

» Voilà comment le versant oriental des Andes reçoit annuel-
» lement des quantités énormes d'eau et constitue le berceau du
» plus gigantesque des fleuves de la terre, du fleuve des Ama-
» zones. »

Ensuite M. V. D. M. fait voir successivement que la poussière, de concert cette fois avec sa rivale la gouttelette d'eau, constitue un immense manteau protecteur qui empêche la chaleur terrestre de rayonner librement vers les espaces célestes; qu'elles sont la cause de l'aurore, du crépuscule et des lueurs crépusculaires qui persistent longtemps après une violente éruption volcanique; et que le grain de poussière est le vrai distributeur de la lumière du jour. Voici le développement de ce dernier point :

« Le soleil vient de se lever; il est entouré d'une auréole splen-
» didement colorée d'où s'élancent vers tous les points de l'hori-
» zon de puissants faisceaux lumineux; rien d'étonnant que la
» prunelle de nos yeux reçoive les rayons directs; mais comment
» se produit, pour un même observateur, l'éclairement de toutes
» les régions aériennes, y compris celles qui sont directement
» opposées au soleil? Par quel pouvoir magique les rayons sont-
» ils répercutés du nord comme du sud, de l'occident comme
» de l'orient? Quel est le distributeur mystérieux de cette
» lumière qui en tout temps a exercé la lyre du poète et le pin-
» ceau du peintre, de cette lumière qui éclaire la cabane de l'ar-
» tisan comme les palais des rois, qui égaie le grabat du pauvre
» comme elle fait briller les lambris dorés du riche? Eh bien,
» ce magicien, ce distributeur mystérieux, cet être d'une activité
» vraiment merveilleuse, c'est encore et toujours notre petit
» héros : c'est l'humble grain de poussière qui, répandu partout à
» profusion dans les couches atmosphériques voisines de la terre
» (jusqu'à 5 ou 6 kilomètres de hauteur), dévie, reflète, réfléchit

» de mille et mille façons les rayons lumineux, envoie partout
» cette clarté qui réjouit tous les êtres et excite l'activité dans
» l'immense laboratoire de la nature comme dans le plus petit
» atelier du travailleur ; c'est enfin la parcelle microscopique qui,
» comme l'aile d'un insecte ou le pétale d'une fleur, chante à sa
» manière son hymne en l'honneur du Tout-Puissant. Devant un
» pareil spectacle, est-ce trop demander à l'homme qu'il élève,
» lui aussi, sa noble voix à la plus grande gloire du Très-Haut ? »

Enfin, M. V. D. M. termine en appelant sur son héros la bienveillante attention de ses auditeurs, avec d'autant plus de raison que l'histoire d'un grain de poussière, c'est, pour une bonne part, l'histoire de l'homme lui-même.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 4 AVRIL 1894.

Présidence de M. VICAIRE, *vice-président.*

M. le chanoine Delvigne, délégué de la *Société bibliographique de Paris,* donne lecture du rapport suivant :

« MESSIEURS,

Ma présence à cette tribune atteste une fois de plus, s'il en était encore besoin, les liens de confraternité intime qui unissent la Société scientifique à son aînée, la Société bibliographique de France. Celle-ci, j'avais l'honneur de vous le dire l'an dernier, a célébré ses noces d'argent avec un éclat exceptionnel. Les membres qui prirent part aux belles solennités de ce jubilé, se promirent bien d'aider, dans la mesure de leurs forces, à propager une œuvre destinée à rendre les plus grands services aux hommes de notre âge.

« Qui ne s'est effrayé, disait récemment du haut de la chaire de vérité le fils même du digne marquis de Beaucourt, des ravages opérés de notre temps dans les intelligences ?

» C'est d'abord la philosophie qui, de jour en jour, se fait maté-

rialiste et impie, s'efforçant de laïciser la conscience humaine, de séparer la science de la religion, de mettre en contradiction les modernes découvertes et la révélation chrétienne. Entendez les rationalistes! Dans les chaires universitaires aussi bien que dans les revues, de toutes parts retentissent les mêmes leçons, tendant toutes au même but : amoindrir l'idée de Dieu, supprimer le surnaturel! Dieu n'est plus qu'un vain mot, la vie future une fable, la mort un saut dans l'ombre et le néant...

» Avec la philosophie, avec l'histoire, la science proprement dite. Enivrée de ses progrès et de ses conquêtes, contente de ses seules lumières, elle prétend maintenant s'émanciper, secouer le joug de toute autorité supérieure ; elle n'aspire plus qu'au jour où tous les dogmes enfin s'évanouiront, disparaîtront de la surface du globe, chassés par la raison triomphante.

» Ce jour-là, Messieurs, la corruption universelle sera définitivement achevée. Et comment ne pas exprimer nos craintes, lorsque d'ores et déjà nous entendons pousser autour de nous le cri de l'athéisme et de l'indépendance plénière : « Ni Dieu, ni » maître! » ?

» Le mal moral, continue le même orateur, a pour siège les intelligences et les cœurs; la Société bibliographique qui, elle aussi, prétend saisir l'homme tout entier, poursuit ce double but :

» Guérir les intelligences par la vraie science ;

» Guérir les cœurs par les bons livres et les bonnes lectures.

» Elle s'adresse donc aux savants comme aux ignorants, à l'élite des intelligences comme aux masses populaires; elle embrasse toute la société dans son action moralisatrice ; voilà comment elle est éminemment une œuvre de défense religieuse et de réforme sociale! »

Nous nous permettons de répéter ces paroles, d'une application aussi vraie en Belgique qu'en France.

Pour aider à sa diffusion, la Société bibliographique a tenu des congrès de deux et trois jours dans diverses régions de la France : à Caen, à Lyon, à Besançon. Au mois de novembre dernier, le 14 et le 15 novembre 1895, nos confrères se sont réunis

au Mans. Les délégués de sept départements voisins avaient organisé cette assemblée d'une importance majeure et dont on a le droit d'attendre les plus heureux résultats. On en trouvera le compte rendu détaillé dans le *Bulletin* de décembre.

Notre Société scientifique a aussi désormais des assises régionales. Après Louvain, Gand, Liége, Namur, arrivera cette année le tour de la ville d'Anvers.

Nous ne voulons point nous répéter ici et détailler, comme nous l'avons fait naguère, la liste des principaux travaux dus à l'initiative de nos excellents confrères de France. Nous nous bornerons à vous énumérer aujourd'hui des publications dont on a le droit d'être légitimement fier : la *Revue des questions historiques* se maintient au rang qu'elle a su conquérir dès le premier jour; le *Polybiblion*, paru en 1868, toujours bien renseigné sur les publications nouvelles; l'*Histoire poétique des Mérovingiens*, œuvre de notre érudit confrère M. Godefroid Kurth; le *Répertoire des sources historiques du moyen âge*, livre unique en son genre, par M. le chanoine Ulysse Chevalier; celui-ci vient de nous donner le premier fascicule de sa *Topobibliographie* (A-B).

Ce sont là des titres on ne peut plus sérieux à la confiance du public intelligent, instruit, animé du désir de voir refleurir de plus en plus au milieu de notre société malade la culture sérieuse de la science dans tous les ordres de connaissances. »

M. Vicaire, qui préside la séance, met ensuite en discussion la question à l'ordre du jour, relativement à l'introduction de l'enseignement des sciences naturelles dans les études d'humanités.

M. l'abbé Wouters prononce un discours tendant à démontrer qu'il y a lieu de consacrer, dans les collèges libres, au moins une heure par semaine à l'étude des sciences naturelles, à partir de la quatrième latine.

M. Degive soutient qu'il est nécessaire de faire une place beaucoup plus grande à l'étude de la nature dans l'enseignement moyen, et que cette place devrait se faire aux dépens du grec et

du latin. L'orateur expose ensuite un programme de sciences naturelles telles qu'elles doivent être enseignées d'après lui. Ce programme comporte deux heures de sciences naturelles par semaine depuis la sixième.

M. Thiébauld insiste dans le même sens que M. Degive, en faisant ressortir l'importance des langues modernes dans la vie sociale. Leur puissance éducative est presque égale à celle des langues anciennes.

M. Mansion combat les idées développées par MM. Wouters, Degive, Thiébauld et défend le système traditionnel des humanités classiques. Selon lui, c'est après la rhétorique qu'il y a lieu de créer, pour les futurs élèves des facultés de sciences naturelles et de médecine, une classe consacrée à l'étude de la physique, de la chimie, de la zoologie et de la botanique.

La suite de la discussion est renvoyée au lendemain.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 5 AVRIL 1894.

Présidence de M. le Chanoine Delvigne, *vice-président.*

Le R. P. Dierckx, S. J., fait une conférence sur *L'Homme-singe en face de la Science et de la Foi.* En voici le résumé :

Depuis que Darwin et Haeckel ont vulgarisé les séduisantes hypothèses du transformisme, une école de savants fort accrédités, suivis de nombreux et ardents disciples, s'est donné pour mission d'effacer les caractères irréductibles qui font de l'âme humaine une création spéciale de Dieu dans la nature, de ravaler l'homme au rang de la brute, et de montrer qu'il est issu des animaux sans raison à la suite de modifications lentes mais profondes, suivant les principes bien connus du darwinisme.

Le P. Dierckx a voulu demander à ces savants eux-mêmes s'ils croient avoir réussi : les aveux d'un adversaire sont mieux à l'abri de la précipitation ignorante, du parti pris, des vues étroites et

intéressées; ils dispensent souvent d'une longue et fastidieuse discussion de détail.

Dès 1868, M. Haeckel, professeur à l'Université d'Iéna, avait bâti tout un système *à priori* au sujet de nos prétendus liens de parenté avec les animaux. Il a été désavoué par Darwin, le fondateur de la doctrine, par Claparède et par Huxley, ses amis personnels, enfin par Virchow, son ancien maître.

D'autres, après lui, ont cherché à prendre position sur le terrain de l'observation et de l'expérience. Ils ont invoqué tour à tour la haute antiquité des premières traces d'un être intelligent dans les couches géologiques, les ressemblances évidentes du squelette humain avec les restes des singes fossiles, le caractère d'infériorité manifeste des crânes de l'homme primitif des cavernes.

Mais au fur et à mesure que les recherches se multiplient, les données certaines en faveur de l'homme tertiaire se font de plus en plus rares : les seules que M. de Mortillet prétendait maintenir comme authentiques ne supportent plus l'examen. Le seul singe fossile qui a eu jadis l'honneur d'être mis en parallèle avec l'homme, s'est trouvé, grâce à des fouilles récentes, être inférieur à plusieurs singes actuels. Enfin, Virchow a déclaré au Congrès de Moscou, en 1892, que les crânes quaternaires ne prouvent pas l'existence d'une race inférieure primitive qui puisse être considérée comme le terme de passage entre les animaux et l'homme actuel. Parmi ces crânes, les uns constituent des types uniques, exceptionnels; d'autres ont une position géologique très douteuse; d'autres encore ont été mal décrits; le plus grand nombre enfin ressemble aux crânes des races modernes, et quelques-uns même à ceux des races civilisées. Le terrain de la géologie n'est donc pas favorable à la théorie de notre descendance simienne.

L'anatomie et la physiologie ne lui fournissent aucune base solide non plus.

On a voulu faire du cerveau l'organe sécréteur de la pensée, et rattacher l'évolution de l'intelligence, du sentiment moral et religieux à l'évolution du système nerveux. M. Carl Vogt, professeur à l'Université de Genève, avait engagé la lutte sur ce

point, il y a quelque vingt ans. Aujourd'hui, il bat en retraite, il proclame tout haut que les anomalies du cerveau sont, non pas un caractère ancestral, un cas d'atavisme, un souvenir de notre origine simienne, mais un simple arrêt de développement morbide, un vulgaire accident pathologique. M. Huxley, que de Quatrefages appelait *le plus pur et le plus fidèle darwiniste*, rejette sans façons le fameux argument tiré des organes rudimentaires inutiles. A son sens, les rudiments d'organes ne fournissent aucune preuve distincte de celle qu'on emprunte d'ordinaire aux ressemblances des membres normalement développés. Or, cette preuve est faible, si faible qu'aucun partisan de notre descendance animale n'ose plus se prononcer sur la question de notre ancêtre immédiat. Les uns, comme Darwin et Haeckel, glissent des formes de transition hypothétiques entre l'homme et les singes, au mépris des faits et des principes fondamentaux du transformisme. Huxley préfère, selon ses expressions, « laisser aux mains puissantes de M. Darwin les conséquences des développements où il entre ». Carl Vogt, après bien des variations, en est réduit à n'avoir plus de système.

Les savants de second ordre et surtout les vulgarisateurs sectaires ne sauraient s'astreindre à être toujours vrais; ils continuent bravement à berner les ignorants et à leur dire : « Tout se passe comme si nous descendions du singe. » Il y a plus : selon eux, l'évolution n'a pas dit son dernier mot. L'homme n'est pas le terme supérieur de la série animale; le progrès indéfini l'élèvera un jour au-dessus de sa propre nature : « l'homme de l'avenir sera semblable à Dieu et Dieu lui-même ! »

Est-ce assez de pédantisme et d'effronterie ? Par malheur, la foule est si facile à séduire, surtout quand on flatte ses passions !

Il est incontestable, d'autre part, que les honteuses théories du matérialisme contemporain perdent du terrain dans le monde scientifique. Carl Vogt et Virchow combattent actuellement l'évolutionnisme appliqué à l'homme, avec une logique impitoyable, et avec une ardeur qui pourrait faire croire à un retour vers les

doctrines spiritualistes. Il y a plus : Haeckel lui-même, le célèbre professeur d'Iéna, qui semblait ne devoir jamais se rendre à l'évidence, vient de retirer, comme démenti par les observations, l'argument tiré des faits de l'embryogénie. Cette retraite est significative ; car, à l'origine du mouvement évolutionniste, Haeckel écrivait : « Les faits si saisissants de l'embryologie ne sauraient plaire à ceux qui creusent un abîme entre l'homme et le reste de la nature, à ceux surtout qui ne veulent pas entendre parler de l'origine animale du genre humain. »

Virchow pouvait donc dire avec raison au Congrès de Moscou : « Dans la question de l'homme, *nous sommes repoussés sur toute la ligne*. Toutes les recherches entreprises dans le but de trouver la continuité dans le développement progressif ont été sans résultat. Il n'existe pas d'Homme-singe ; le chaînon intermédiaire demeure un fantôme. »

On le voit, la révélation chrétienne gagne à être confrontée avec les rêveries matérialistes. Dans la question de nos origines, moins que dans toute autre, elle n'a rien à craindre du progrès de la science ; elle sera toujours à l'abri de toute attaque sérieuse, pourvu qu'on se garde de prendre des vues personnelles pour l'interprétation autorisée de la Bible, des opinions probables pour des dogmes certains, des explications contestées pour la parole de Dieu.

Au sujet de la création d'Adam et d'Ève, il sera sage, jusqu'à plus ample informé, de s'en tenir à l'interprétation traditionnelle du récit de la Genèse. Sans doute, des écrivains bien intentionnés ont cru pouvoir faire à l'école évolutionniste certaines concessions compatibles, d'après eux, avec la foi orthodoxe, et aucun écrivain catholique ne nous paraît avoir le droit de leur disputer le terrain de l'hypothèse et de la libre discussion.

Pourtant, dans l'état actuel des choses, — tout esprit sincère en conviendra, — quelques-unes de leurs concessions, sages peut-être parce qu'elles sont prévoyantes et encore purement hypothétiques, ne laisseraient pas que d'être prématurées, si elles préjugeaient la question de fait.

A plus forte raison, le temps n'est pas venu de déchirer la première page de Moïse et de remplacer le dogme catholique de la création de l'homme par le dogme matérialiste de la descendance du singe. (*Applaudissements.*)

Cette conférence sera donnée *in extenso* dans les livraisons d'avril et de juillet de la *Revue des questions scientifiques*.

L'assemblée reprend ensuite la discussion relative à l'enseignement des sciences naturelles.

M. Proost, inspecteur général de l'agriculture, développe sur plusieurs points les idées qu'il défend depuis l'origine de la Société scientifique touchant la nécessité de modifier le programme de l'enseignement à tous les degrés et de les adapter aux exigences de la société moderne. Il insiste particulièrement sur la nécessité d'enseigner les lois de la biologie dans les écoles normales et d'en pénétrer, en particulier, ceux qui sont chargés d'organiser l'enseignement des jeunes filles.

M. Thiébauld développe les idées suivantes sur la question en discussion : Lorsqu'on se trouve en présence d'une réforme à réaliser, on rencontre toujours cette objection, qu'elle n'a point passé au creuset de l'expérience. Ce serait la négation de tout progrès.

Je constate que l'honorable M. Mansion s'est borné à critiquer l'enseignement des sciences naturelles tel qu'il est organisé actuellement, non tel qu'il pourrait l'être. Quel aveu de la vérité de notre thèse !

On s'exagère d'ailleurs les effets du travail d'analyse appliqué aux langues anciennes.

La traduction n'est qu'un travail de combinaison, sujet à bien des tâtonnements et très difficile à proportionner à la force des élèves. Au moyen âge, le latin était cultivé parce qu'il était la langue de la science.

Il nous faut former des hommes, nous dit-on. Certes, mais des hommes qui ne soient pas seulement des orateurs, des écrivains,

qui sachent être vainqueurs dans la lutte de la vie, accroître les richesses et l'influence de leur pays. Telle est la haute portée sociale de cette question qui demande une prompte solution, si nous ne voulons laisser à d'autres l'honneur de la résoudre en harmonie avec les exigences du progrès.

M. Mansion fait ses réserves sur certaines opinions qui lui ont été attribuées.

Après la proclamation du résultat des élections pour l'année 1894-1895, M. le chanoine Delvigne déclare la séance close.

Recettes et dépenses de la Société scientifique

du 31 décembre 1892 au 31 décembre 1893 (*).

A. Dépenses. Frais de bureau . . . . fr.	332	67
Frais des sessions	455	95
Impression et expédition du tome XVI . . .	3,347	73
et du tome XVII des *Annales*	3,392	17
Indemnités aux secrétaires des sections . . .	625	»
Subside accordé en 1893	300	»
Revue : Direction.	1,500	»
Impression	5,406	30
Collaboration	6,044	50
Total. . . .Fr.	21,404	32
B. Recettes. Abonnements et cotisations versés au secrétariat . . . . fr.	3,100	»
Id. à la Société belge de librairie.	9,000	»
Produit des coupons du portefeuille	3,749	58
Total. . . .Fr.	15,849	58
C. Différence en perte. . . . . .Fr.	5,554	74

(*) Ce compte de recettes et dépenses a été approuvé dans la séance du 18 octobre 1894, suivant la décision de l'assemblée générale du 3 avril 1894 (voir p. 133).

APPENDICE.

I. Adresse de la Société scientifique de Bruxelles à Sa Sainteté Léon XIII, à l'occasion de son jubilé épiscopal.

TRÈS SAINT PÈRE,

La Société scientifique de Bruxelles s'associe aux vœux qui s'élèvent de toutes parts pour Votre Sainteté à l'occasion du cinquantième anniversaire de Sa consécration épiscopale. Elle mêle sa faible voix au concert des princes et des peuples qui viennent déposer à Ses pieds l'hommage de leur respect et de leur dévouement. Elle adresse ses actions de grâces au Tout-Puissant de ce qu'il a daigné accorder à Votre Sainteté, après trente-cinq ans d'un épiscopat fécond, quinze ans d'un pontificat plus fécond encore.

La Société scientifique de Bruxelles est d'autant plus heureuse de prendre part aux manifestations provoquées par le jubilé épiscopal de Votre Sainteté, qu'un grand nombre de ses membres appartiennent à la Belgique, pays qu'il Lui a plu de combler de témoignages d'une sollicitude particulière.

La Société scientifique de Bruxelles a été fondée en 1875 pour promouvoir l'étude des sciences physiques et naturelles et pour montrer l'harmonie de ces sciences avec les enseignements de la Philosophie chrétienne et la Religion révélée, conformément à sa devise : *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest.* Elle exprime de nouveau en ce jour à Votre Sainteté son ferme désir de rester toujours fidèlement attachée aux doctrines de la Sainte Église. Elle affirme, en particulier, conformément à sa déclaration du 15 avril 1890, son obéissance aux enseignements du Concile du Vatican et à ceux de Votre Sainteté dans l'encyclique *Aeterni Patris*, sur les rapports des sciences physiques et naturelles avec la Religion et la Philosophie traditionnelle des écoles catholiques.

La Société scientifique de Bruxelles prie la Divine Providence de conserver longtemps encore Votre Sainteté à la tête du gouvernement de la Sainte Église, et Vous demande humblement, Très Saint Père, de vouloir lui accorder Votre bénédiction apostolique pour qu'elle la soutienne et l'encourage dans l'œuvre importante à laquelle elle consacre ses efforts.

De Votre Sainteté,

Les serviteurs très obéissants et très dévoués,

Le Secrétaire,
P. MANSION.

Le Président,
LOUIS HENRY.

Bruxelles, le 22 juin 1893.

II. Réponse de S. É. le cardinal Rampolla.

Illmo Signore,

L'indirizzo umiliato al Santo Padre della Società Scientifica, di cui la S. V. Illma è degno Presidente, non poteva non riuscire accetto a Sua Santità pei sentimenti di filiale devozione che manifesta nell' associarsi alle feste celebrate dal mondo cattolico per commemorare il giubileo episcopale della Santità Sua; nondimeno l'indirizzo medesimo è stato eziandio di molto gradimento al Santo Padre per le esplicite dichiarazioni che la prelodata Società scientifica ha tenuto a rinnovare anche in questa occasione. L'Augusto Pontefice mi ha quindi commesso di ringraziare in Suo nome la S. V. e i suoi degni Colleghi pei filiali augurii a Lui indirizzati, e di congratularmi con Lei pei nobili propositi di volersi sempre attenere agli insegnamenti e ai metodi indicati nella Sua Enciclica *Aeterni Patris*. Il Santo Padre si compiace di sapere che nei diciotto anni che conta di vita cotesta Società scientifica ha già prodotto buoni frutti, ma desiderando che continui a produrne in copia sempre maggiore, ha invocato l'abbondanza delle celesti

benedizioni sulla stessa S. V. e su tutti coloro che cooperano con Lei allo sviluppo della predetta Società.

Sono lieto di renderla di ciò consapevole, mentre profitto dell'occasione per dichiararmi con sensi della più distinta stima

Di V. S. Illma

Aff^{mo} per servirla
M. Card. Rampolla.

Roma, 8 Luglio 1893.

Sign. Luigi Henry, Presidente della Società scientifica di Bruxelles.

TRADUCTION.

Monsieur,

L'adresse présentée au Saint Père par la Société scientifique, dont vous êtes le digne Président, ne pouvait manquer d'être agréable à Sa Sainteté à cause des sentiments de filial dévouement qu'elle exprime en s'associant aux fêtes que célèbre le monde catholique pour honorer le jubilé épiscopal de Sa Sainteté. Toutefois, l'adresse même Lui a été particulièrement agréable à cause des déclarations explicites que la Société scientifique a voulu renouveler encore à cette occasion. L'Auguste Pontife m'a chargé en conséquence de vous remercier en son nom, vous et vos dignes collègues, pour les souhaits que vous lui avez filialement adressés, et de vous féliciter de la généreuse résolution que vous avez prise de rester toujours fidèles aux enseignements et à la direction donnés par Lui dans Son encyclique *Aeterni Patris*. Le Saint Père se réjouit de savoir que, pendant les dix-huit années de son existence, cette Société scientifique a déjà produit d'heureux fruits; mais désirant qu'elle en produise toujours davantage, Il a appelé l'abondance des bénédictions célestes sur vous et sur tous ceux qui travaillent avec vous au développement de la susdite Société.

Je suis heureux, Monsieur, de vous en donner connaissance,

et je profite de l'occasion pour me déclarer, avec les sentiments de l'estime la plus distinguée,

Votre très affectionné et très dévoué
M. Card. RAMPOLLA.

Rome, 8 juillet 1893.

A Monsieur Louis Henry, président de la Société scientifique de Bruxelles.

LISTE DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

du 24 novembre 1893 au 15 mars 1895.

Memorias de la Comisión del Mapa geológico de España. Descripción física y geológica de la provincia de Vizcaya, par D. Ramón Adán de Yarza. — Madrid, 1892.

Miscellanées mathématiques, par Léonce Agües. — Barcelona, 1894.

Le Vin et les vins de fruits, par Pierre Andrieu. — Paris, 1894.

Essais de psychologie et de métaphysique positives. Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques, par Gabriel Arnoux. — Paris, 1894.

Antiquités frankes trouvées en Bohême, par le Bon de Baye. Extrait du *Bulletin monumental,* année 1894. — Caen, 1894.

Entwurf einer Integralrechnung auf Grund der Potenzial-Logarithmal und Numeralrechnung, von Dr Julius Bergbohm. Zweites Heft. — Leipzig, 1893.

Contribution à l'étude du massage, par M. Bourdeaux, médecin de bataillon de 1re classe. Extrait des *Archives médicales belges,* février-mars 1894. — Bruxelles, 1894.

Éd. Branly. Traité élémentaire de physique. — Paris.

Cours de géométrie descriptive, par Ch. Brisse. — Paris, 1895.

Précis de météorologie endogène, par F. Canu, avec préface de Phil. Gérigny. — Paris, 1894.

La Evolución en la química, por José R. Carracido. — Madrid, 1894.

Eugène Coemans. Description de la flore fossile du premier étage du terrain crétacé du Hainaut. — Bruxelles, 1860.

Id. Les *Annularia* du terrain houiller de Belgique. Extrait des *Bulletins de la Société royale de botanique,* t. IV, n° 3, séance du 3 décembre 1865.

Id. *Cladoniae Acharianae,* ou revision critique des *Cladonia* du Synopsis et de l'Herbier d'Acharius. Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 2e série, t. XIX, n° 1.

Id. Notices biographiques sur quelques lichénographes célèbres. Extrait des *Bulletins de la Société royale de botanique,* t. III, n° 3, séance du 4 décembre 1864.

Id. Notice sur le *Pilobolus crystallinus.* — Bruxelles, 1859.

Id. Spicilège mycologique. N° 1. Notice sur les *Ascobolus* de Belgique. — N° 2. Note sur les *Ozonium* de la flore belge. — N° 3. Note sur un Champignon nouveau, *Kickxella alabastrina* Coem. — N° 4. Quelques Hyphomycètes nouveaux : *Mortierella polycephala* et *Martensella pectinata.* — N° 5. De l'existence de conidies chez les Agaricinées. — Nos 6 et 7.

Recherches sur le polymorphisme et les différents appareils de reproduction chez les Mucorinées. — N° 8. Revision des genres *Gonatobotrys* et *Arthrobotrys* Corda. — Extraits des *Bulletins de la Société royale de botanique de Belgique*, t. I-II, et des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2ᵉ série, tomes XV-XVI.

Eugène Coemans. Une visite à Hammarby. Extrait des *Bulletins de la Société royale de botanique de Belgique*, tome V, n° 1, séance du 6 mai 1866.

J.-J. Kickx. Notice biographique sur le Révérend abbé Eugène Coemans. Extrait des *Bulletins de la Société royale de botanique*, t. X, séance du 10 juin 1871.

Monographie des *Sphenophyllum* d'Europe, par M. Eug. Coemans et M. J.-J. Kickx. Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XVIII, n° 8. — Bruxelles, 1864.

Un Insecte et un Gastéropode pulmoné du terrain houiller, par MM. P.-J. Van Beneden et Eug. Coemans. Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, t. XXIII, n° 4, 1867.

A.-R. Brehm. Merveilles de la nature. Le Monde des plantes, par Paul Constantin, 1ʳᵉ et 2ᵉ série.

O Clima do Rio de Janeiro. Le climat de Rio de Janeiro, par L. Cruls. — Rio de Janeiro, 1892.

Electriciteit en Magnetisme, door Dʳ M.-F. Daniëls. — Nijmegen, 1894.

La Chaleur, par Pierre de Heen. — Liége, 1894.

Nouveau procédé d'hystérectomie abdominale dans les cas de fibromes utérins inopérables par la voie vaginale; — De l'hystérectomie vaginale dans les suppurations pelviennes; — Statistique des opérations pratiquées pendant l'année 1893, par le Dʳ Delétrez. — Extraits des *Annales de l'Institut chirurgical de Bruxelles*. — Bruxelles, 1894.

La Forêt de Dreuille et les repeuplements résineux, par E. Desjobert. Extrait de la *Revue scientifique du Bourbonnais et du centre de la France*, janvier-février 1894.

Les Plantes utiles du Congo, par Alfred Dewèvre, 2ᵉ édition. — Bruxelles-Paris, 1894.

Les *Strophanthus* du Congo, par A. Dewèvre. Extrait du *Journal de pharmacie d'Anvers*, novembre 1894. — Anvers, 1894.

La Vie intellectuelle des populations primitives, par Aristide Dupont, avocat. — Bruxelles, 1894.

Referendum des Ingénieurs. Enquête sur l'enseignement de la Mécanique, par M. V. Dwelshauvers-Dery et M. Julien Weiler. — Liége, 1893.

Le Rôle de la médecine mentale, causerie faite à la Conférence du Jeune Barreau de Liége, le 6 juin 1894, par le Dʳ X. Francotte. — Liége, 1894.

Surdi-mutité histérique guérie par suggestion à l'état de veille, par le prof. X. Francotte. Extrait des *Annales de la Société médico-chirurgicale de Liége*. — Liége, 1894.

Rapport sur les vingt-cinq années d'existence de la Société de médecine de Belgique, par le Dʳ X. Francotte. Extrait du *Bull. Soc. de médec. mentale de Belg.*, 1894. — Gand, 1894.

Observation pour servir à l'histoire du délire des négations, par le Dr X. Francotte. Extrait du *Bull. Soc. de médec. mentale de Belg.*, 1894. — Gand, 1894.

Aperçu du développement et de l'état actuel de l'enseignement de la médecine mentale en Belgique, par le Dr X. Francotte. Extrait du *Bull. Soc. de médec. mentale de Belg.* — Gand, 1894.

Essai sur les phénomènes électriques des êtres vivants, comprenant l'explication scientifique des phénomènes dits spirites, par S.-L. Fugairon. — Paris, 1894.

Études archéologiques et variétés, par Adolphe Gagnon. — Levis, 1894.

Effets thermiques dus à la compression. Thèse présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève pour obtenir le grade de docteur ès-sciences, par Paul Galopin. — Genève, 1893.

La Pratique du teinturier, par Jules Garçon. Tome I : Les Méthodes et les essais de teinture; Le Succès en teinture. Tome II: Le Matériel de teinture. — Paris, 1893-1894.

Leçons de chimie à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, par H. Gautier et G. Charpy. Deuxième édition. — Paris, 1894.

Monsignor V. Giannuzzi. La Questione agricola in Italia. Extrait de la *Scuola Cattolica e la Scienza Italiana.* — Milano, 1894.

Sur quelques cellules musculaires de l'*Ascaris*, par G. Gilson et J. Pantel. Abdruck aus *Anatomischer Anzeiger,* IX. Bd, Nr 23.

Études de géologie biblique. Le Caractère naturel du Déluge, par Raymond de Girard. — Fribourg, 1894.

Real Academia de ciencias médicas, fisicas y naturales de la Habana. Medicina indígena de Cuba, su valor historico, trabajo leido en la sesion celebrada el dia 28 de octubre de 1894 por el Academico de número Dr D. Antonio de Górdon y de Acosta. — Habana, 1894.

Den Norske Nordhavs-Expedition 1876-1878. XXII. Zoologi. Ophiuroidea, ved James A. Grieg. — Christiania, 1893.

Science et poésie : incompatibilités prétendues; conciliation par l'Esthétique, par Maurice Griveau. Extrait des *Annales de philosophie chrétienne.* — Paris, 1893.

La Géométrie des masses, par Haton de la Goupillière. Extrait de la *Revue générale des sciences pures et appliquées.* — Paris, 1893.

Association française pour l'avancement des sciences, etc. Congrès de Besançon, 1893. M. Haton de la Goupillière, Sur le minimum du potentiel de l'arc. — Paris.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille, tome III, année 1893. Supplément. Étude monographique de la famille des Globulariées, par M. le Dr Ed Heckel. — Marseille, 1894.

Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques à l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques, par Charles Henry. — Paris, 1895.

Quelques aperçus sur l'Esthétique des formes, par M. Charles Henry. Publication de la *Revue blanche.* — Paris, 1895.

Quelques pages de déontologie médicale, par le professeur Eug. Hubert. — Lierre, 1892.

La Lèpre, l'île de Molokaï; le P. Damien, conférence donnée à la Société médicale des Étudiants par M. le prof. Eugène Hubert. — Louvain.

Optique géométrique, 6e mémoire. Genèse, variété et polarisation axiale des faisceaux de rayons lumineux ou calorifiques, par M. l'abbé Issaly. Extrait des *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. V, 4e série. — Bordeaux.

Occasional Papers of the California Academy of Sciences, III. Evolution of the Colours of North American Land Birds, by Charles A. Keeler. — San Francisco, January, 1893.

La Géométrie réglée et ses applications, par G. Kœnigs. — Paris, 1895.

Woordenlijst van de Barcë-taal, door Alb.-C. Kruyt. Uitgegeven door het Koninklijk Instituut voor de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. — 'S Gravenhage, 1894.

Le Climat de la Belgique en 1893, par A. Lancaster. — Bruxelles, 1894.

Item, en 1894. — Bruxelles, 1895.

Les Fortes pluies d'octobre 1894, par A. Lancaster.

Études climatologiques, par A. Lancaster. — Bruxelles, 1894.

L'Équilibre de la terre ferme, par A. de Lapparent. Extrait du *Correspondant*. — Paris, 1894.

Traité de la physionomie humaine, par Eugène Ledos. — Paris, 1894.

Notice sur les principales installations établies par la Compagnie de l'Industrie électrique de Genève, par Ed. Lullin. — Genève, 1894.

The Principles of Elliptic and Hyperbolic Analysis, by Alexander Macfarlane. — Boston.

Principes et développements de géométrie cinématique, par le Colonel A. Mannheim. — Paris, 1894.

Contre la représentation proportionnelle, par P. Mansion. La R. P. ne peut pas donner la majorité, à la Chambre, au parti qui l'a dans le pays.

Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, par M. Ch. Méray. Première partie, Principes généraux. — Paris, 1894.

Estudio sobre las borrascas en la costa occidental de Galicia, por el P. Baltasar Merino, S. J. — Tuy, 1893.

Les Téguments séminaux des Cyclospermées, 1re partie, par A. Meunier. Extrait de *La Cellule*, t. VI, 2e fascicule. — Lierre-Louvain.

Les Téguments séminaux des Papavéracées, par Alph. Meunier. Extrait de *La Cellule*, t. VII, 2e fascicule. — Lierre-Louvain.

Fernand Meunier. Notes diverses extraites du *Bulletin de la Société zoologique de France*, des *Annales de la Société entomologique de France*, du *Bulletin des séances et bulletin bibliographique de la Société entomologique de France*.

Leçons élémentaires de télégraphie électrique, deuxième édition, par L. Michaut et M. Gillet. — Paris, 1895.

Arkoses de Lembecq-Clabecq. Thèse inaugurale pour l'obtention du grade de docteur en sciences minéralogiques et géologiques, par J. Muthuon, S. J. — Louvain, 1894.

Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques, par M. M. d'Ocagne. — Paris, 1894.

Sur une classe de transformations dans le triangle, et notamment sur certaine transformation quadratique birationnelle, par M. M. d'Ocagne. Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*. — Paris, 1893.

Sur la construction des cubiques cuspidales par points et tangentes, par M. M. d'Ocagne. Extrait des *Nouvelles Annales de mathématiques*. — Paris, 1892.

Remarque sur la déformation des surfaces de révolution, par M. M. d'Ocagne. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*. — Paris, 1893.

Sur la composition des lois d'erreurs de situation d'un point, par M. Maurice d'Ocagne. — 5 mars 1894.

Mémoires sur les suites récurrentes, par M. M. d'Ocagne. Extrait du *Journal de l'École polytechnique*, LXIVe cahier, 1894.

Premières leçons d'algèbre élémentaire, par Henri Padé. — Paris, 1892.

Epilogo dei ragionamenti tenuti nella pontificia Accademia Tiberina l'anno 1893, letto nella tornata del dí 12 Febbraio 1894 da Mons. Giuseppe Patroni, segretario annuale. — Roma, 1894.

Eugenio Ruidiaz y Caravia. La Florida, su conquista y colonizacíon por Pedro Menéndez de Avilés. — Madrid, MDCCCXCIV.

Resultäte der im Sommer 1893 in dem nördlichsten Theile Norwegens ausgeführten Pendelbeobachtungen, etc., von O.-E. Schlötz. — Kristiania, 1894.

A propos des cailloux roulés du houiller, par G. Schmitz, S. J. Extrait des *Ann. de la Soc. géol. de Belgique*, t. XXI, Bulletin.

Le Mur des couches de houille et sa flore, par G. Schmitz, S. J. Extrait des *Ann. de la Soc. géol. de Belgique*, t. XXII, Mémoires.

Jean-Servais Stas. OEuvres complètes — Bruxelles, 1894.

Essai sur la théorie des nombres, premiers éléments, par T.-J. Stieljes. — Paris, 1895.

Éléments de psychologie physiologique et rationnelle, par le Dr Georges Surbled. — Paris, 1894

La Volonté, étude de psycho-physiologie, par le Dr Georges Surbled. — Arras, 1894.

La Doctrine des localisations cérébrales, par le Dr Surbled. Extrait de la *Revue thomiste*. — Paris, 1895.

Le Travail autonome au XIXe siècle, faits et doctrines, par J. de la Vallée Poussin. Extrait de la *Revue générale*, octobre et novembre 1893. — Bruxelles.

Élisée Reclus, par J. de la Vallée Poussin. Extrait de la *Revue générale*, avril 1894. — Bruxelles.

Matériaux pour l'étude de l'oligocène belge, fascicule I. Coup d'œil synthétique sur l'oligocène belge et observations sur le tongrien supérieur du Brabant, par Ernest Van den Broeck. Extrait du *Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie*. — Bruxelles, 1894.

Occasional Papers of the California Academy of Sciences, IV. A Classed and Annotated Bibliography of the Palaeozoic Crustacea, 1698-1892, to wich

is added a Catalogue of North American Species, by Anthony W. Vogdes. — San Francisco, June, 1893.

Sac. Dott. G. Volpi. Gli Argomenti storici sul divorzio citati dall' On. Deputato T. Villa alla Camera italiana il 25 Gennaio 1893. — Palermo, 1893.

The Age of the Human Race according to Science and the Bible, by the Rev. J.-A. Zahm, C. S. C. Reprinted from the *American Catholic Quarterly Review*.

Bible, Science and Faith, by the Rev. J.-A. Zahm, C. S. C. — Baltimore, 1894.

Moses and Modern Science, by the Rev. J.-A. Zahm, C. S. C. Reprint from the *American Ecclesiastical Review*.

Catholic Science and Catholic Scientists, by the Rev. J.-A. Zahm, C. S. C. — Philadelphia, 1893.

R. P. Zahm, C. S. C. Science catholique et savants catholiques, traduit de l'anglais par M. l'abbé Flageolet. — Paris, 1895.

Note sur la découverte de l'homme quaternaire de la grotte d'Antélias au Liban, par G. Zumoffen, S. J. — Beyrouth, 1893.

Actes de la Société scientifique du Chili, t. III, livr. 1-5; t. IV, livr. 1-2. — Santiago, octobre 1893 à août 1894.

Almanach agricole, par G. D. Première année, 1895. — Bruxelles.

Anales de la Asociacion de ingenieros y arquitectos de México. T. III, entregas 10-15; t. IV, entregas 1-3. — México, 1894.

Anales del Museo Nacional de Montevideo, publicados bajo la direccion de J. Arechavaleta. I y II. — Montevideo, 1894.

Annales de l'Observatoire royal de Belgique. Observations météorologiques d'Uccle, 1893. — Bruxelles, 1894.

Résumés et notes des observations météorologiques faites à l'Observatoire royal de Belgique, 1892. — Bruxelles, 1894.

Annales de la Faculté des sciences de Marseille, tomes I, II, III (avec supplément). — Marseille-Paris, 1891-1893.

Annales de l'Institut chirurgical de Bruxelles, publiées par le Dr A. Delétrez. Vol. I, 1894. — Bruxelles.

Annales de la Société géologique de Belgique, t. XX, 1re et 2e livraisons; t. XXI, 1re et 2e livraisons. — Liége, 1892-1894.

Annuaire pour l'an 1894, publié par le Bureau des longitudes. — Item pour l'an 1895. — Paris.

Annuaire de l'Observatoire royal de Belgique, par F. Folie. 1894, 61e année. — Bruxelles, 1894. — Item, 1895, 62e année. — Bruxelles.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1892, oitavo anno. — Item para o anno de 1893. — Rio de Janeiro.

Anuario del Observatorio astronomico national de Tacubaya para el año de 1895. Año XV. — México, 1894.

Archivos do Museu nacional do Rio de Janeiro, volume VIII. — Rio de Janeiro, 1892.

Bulletin de l'Association des ingénieurs-électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore. Deuxième série, t. V, nos 1-2. — Paris, 1894.

Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala, edited by Hj. Sjögren. Vol. I, n° 1, 1892; n° 2, 1893. — Upsala, 1893-1894.

Bulletin de la Société belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie (Bruxelles), t. VI, fascicule 3 et dernier; t. VII, fascicules 2 et 3; t. VIII, fascicule 1. — Bruxelles.

Société française de Physique. — Collection de mémoires relatifs à la physique. Tome I, Mémoires de Coulomb. — Tomes II et III, Électrodynamique. — Tomes IV et V, Mémoires sur le pendule. — Paris, 1884 1891.

Encyclopédie scientifique des Aide-Mémoire. — Section de l'ingénieur : Alheilig, Construction et résistance des machines à vapeur; Moteurs à vapeur. — E. de Billy, Fabrication de la fonte. — F. Bloch, Eau sous pression, appareils producteurs d'eau sous pression. — C. Bourlet, Traité des bicycles et bicyclettes. — E. Caspari, Chronomètres de marine. — A. Croneau, Construction du navire. — Dudebout et Croneau, Appareils accessoires des chaudières à vapeur. — Dwelshauvers-Dery, Étude expérimentale dynamique de la machine à vapeur. — E. Guenez, La Décoration céramique au feu de moufle. — E. Hennebert, Torpilles sèches; La Fortification. — Louis Jacquet, Fabrication des eaux-de-vie. — L. de Launay, Statistique de la production des gîtes métallifères. — R. E. de Marchena, Machines frigorifiques à air; Machines frigorifiques à gaz liquéfiable. — P. Minel, Électricité appliquée à la marine; Régularisation des moteurs des machines électriques. — Prud'homme, Teinture et impression. — E. Sorel, Rectification de l'alcool. — E. Wallon, Choix et usages des objectifs photographiques. — A. Witz, Théorie des machines thermiques.

Encyclopédie scientifique des Aide-Mémoire. — Section du biologiste : L. Brocq et L. Jacquet, Dermatologie, maladies en particulier. — A. Castex, Hygiène de la voix parlée et chantée. — J. Chatin, Organes de relations chez les Vertébrés; Organes de relation chez les Invertébrés; Organes de nutrition et de reproduction chez les Vertébrés; Organes de nutrition et de reproduction chez les Invertébrés. — Ch. Cornevin, Production du lait. — L. Cuénot, L'Influence du milieu sur les animaux. — A. Féré, Épilepsie. — Lannelongue, La Tuberculose chirurgicale. — Magnan et Sérieux, La Paralysie générale. — Dr Pierre Merklen, Examen et séméiotique du cœur. — Ollier, La Régénération des os et les résections sous-périostées. — G. Roché, Les Pêches maritimes modernes de la France. — Dr J. Séglas, Le Délire des négations.

Les Études bibliques. L'Encyclique et les catholiques anglais et américains. — Paris, 1894.

Journal de l'École polytechnique, soixante-troisième cahier. — Paris, 1893.

Université de Liége. Manifestation organisée en l'honneur de Gustave Dewalque, professeur de géologie à l'Université de Liége. *Liber Memorialis* publié par le Comité organisateur, 8 juin 1893. — Liége.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, IVe série, t. III, 2e cahier; t. IV, 1er et 2e cahiers. — Bordeaux, 1893-1894.

Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de médecine de Belgique. Collection in-8°, t. XIII. — Bruxelles, 1894.

The Microscope, edited by Chas. W. Smiley, A. M., New Series, vol. 2, n° 1. Whole N° 13, January 1894. — Washington, D. C.

The Monist, a Quarterly Magazine. Vol. 4, N° 3, April 1894. — Chicago.

Observaciones magnéticas y meteorológicas del real Colegio de Belen, de la Compañia de Jesús, en la Habana. 2° Semestre, Julio-Diciembre, 1889. — Habana, 1893.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde, de juin 1892 à mai 1893. Note de M. G. Rayet. — Bordeaux, 1893.

Observatorio meteorológico del Colegio de la Compañia de Jesus en la Guardia, cuaderno tercero. — Tuy, 1894.

L'Oriente, rivista trimestrale. Anno I, nos 1-4. — Roma, 1894.

Proceedings of the California Academy of Sciences, Second Series, Vol. III, Part 2. — San Francisco, 1893.

The Proceedings and Transactions of the Nova Scotian Institute of Science, Halifax, Nova Scotia, Session of 1891-1892, Second Series, Vol. I, Part 2, 3. — Halifax, 1892-1893.

La Rassegna nazionale, anno XVI, vol. LXXX, 1° dicembre 1894. — Firenze-Milano, 1894.

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Première série : fiches 1 à 100. — Paris, 1894.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, to July 1891. — Item, to July 1892. — Item, for the year ending June 30, 1890. — Item, for the year ending June 30, 1891. — Item, for the year ending June 30, 1892.

Report of the U. S. National Museum. — Washington, 1891.

University of Nebraska. Seventh Annual Report of the Agricultural Experiment Station. Presented to the Governor, January 10, 1894. — Lincoln, Nebraska, U. S. A.

American Ecclesiastical Review, October 1894. — Philadelphia.

The Catholic Reading Circle Review, vol. III, n° 12; vol. IV, n° 1 (sept. et oct. 1893). — Youngstown, Ohio.

Revue des instruments de chirurgie, 4e année, n° 3, 1er mars 1894.

Séances de la Société française de physique, juillet-décembre 1894. — Paris, 1894.

Syllabus of Lectures of the Catholic Summer School, Second Session, 1893.

Transactions of the Academy of Science of St-Louis, Vol. VI, nos 1-17, 12 mars 1892 à 1er juin 1894.

Transactions of the Meriden Scientific Association. Meriden, Conn. A Review of the year 1893. Vol. V. — Meriden, 1894.

Utgivet af den Norske Gradmaalingskommission. Vandstandsobservationer, V Hefte. — Christiania, 1893.

Wereldtentoonstelling Antwerpen, 1894. Nederland. Koloniale Afdeeling. — Amsterdam, 1894.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

SUR

L'EMPLOI DES COSINUS DIRECTEURS DE LA NORMALE

DANS

LA THÉORIE DE LA COURBURE DES SURFACES (*)

PAR

Ph. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain.

L'introduction, dans la théorie de la courbure des surfaces, des cosinus directeurs de la normale, conduit à des résultats souvent très simples, et si ceux qui suivent ne présentent que peu de choses nouvelles, leur groupement autour du même principe ne laisse pas d'être assez remarquable.

1. Soient $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface courbe; p, q, r, s, t les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, comme d'habitude; X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à la surface au point (x, y, z) prise dans un sens déterminé, celui, par exemple, où elle fait un angle aigu avec l'axe des z, $Z > 0$.

(*) Mémoire retrouvé dans les papiers de feu Gilbert et présenté à la première section, dans la séance du 26 octobre 1893, à Namur, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin. Voir le rapport de ce dernier, 1re partie, pp. 1-5.

Les relations

$$(1) \quad . \quad \frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{-1} = -\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

donnent évidemment

$$(2) \quad \ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} p = -\frac{X}{Z}, \quad q = -\frac{Y}{Z}, \quad 1 + p^2 + q^2 = \frac{1}{Z^2}. \\ XdX + YdY + ZdZ = 0. \end{array} \right.$$

On a donc, en différentiant,

$$dp = rdx + sdy = -\frac{ZdX - XdZ}{Z^2} = -\frac{Z^2dX + X(XdX + YdY)}{Z^3}$$

$$= -\frac{(1 - Y^2)dX + XYdY}{Z^3},$$

$$dq = sdx + tdy = -\frac{ZdY - YdZ}{Z^2} = -\frac{Z^2dY + Y(XdX + YdY)}{Z^3}$$

$$= -\frac{(1 - X^2)dY + XYdX}{Z^3}$$

et, en égalant de part et d'autre les coefficients de dx, dy,

$$(3) \left\{ \begin{array}{ll} r = -\frac{1}{Z^3}\left[(1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial x} + XY\frac{\partial Y}{\partial x}\right], & s = -\frac{1}{Z^3}\left[(1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} + XY\frac{\partial Y}{\partial y}\right], \\ s = -\frac{1}{Z^3}\left[XY\frac{\partial X}{\partial x} + (1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial x}\right], & t = -\frac{1}{Z^3}\left[XY\frac{\partial X}{\partial y} + (1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial y}\right]. \end{array} \right.$$

2. Une première conséquence de ces formules consiste dans l'égalité des deux valeurs de s, savoir :

$$(1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial x} + XY\frac{\partial X}{\partial x} = (1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} + XY\frac{\partial Y}{\partial y},$$

ou

$$(4) \quad . \; . \; . \quad (1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial x} - (1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} = XY\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial x}\right).$$

Comme cette égalité doit subsister, quel que soit le système

d'axes rectangulaires choisi pour y rapporter les surfaces, on pourra prendre pour axe des z la normale à la surface, les axes des x et des y étant deux tangentes rectangulaires quelconques; donc X et Y seront nuls, et il viendra

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}.$$

Cette équation n'est autre chose que le théorème de M. Bertrand sur l'égalité des torsions géodésiques de deux sections normales rectangulaires quelconques dans une surface, théorème qui conduit si simplement à celui de Ch. Dupin.

3. Des formules (2), (3) et (1) nous tirons ensuite

$$(1 + q^2) s - pqt =$$
$$\frac{1}{Z^5}\left[X^2Y^2\frac{\partial X}{\partial y} + XY(1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial y} - (1 - X^2)(1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} - (1 - X^2)XY\frac{\partial Y}{\partial y}\right]$$
$$= -\frac{1}{Z^5}(1 - X^2 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{1}{Z^3}\frac{\partial X}{\partial y}.$$

On opère de même pour

$$(1 + p^2) s - pqr,$$

et l'on trouve

$$(5) \quad . \quad . \quad (1 + q^2)s - pqt = -\frac{1}{Z^3}\frac{\partial X}{\partial y}, \quad (1 + p^2)s - pqr = -\frac{1}{Z^3}\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

D'autre part, on tire des mêmes relations

$$(1 + q^2) r - (1 + p^2) t$$
$$= -\frac{1}{Z^5}\left\{(1 - X^2)\left[(1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial x} + XY\frac{\partial Y}{\partial x}\right] - (1 - Y^2)\left[(1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial y} + XY\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\}$$
$$= -\frac{1}{Z^5}\left\{(1 - X^2)(1 - Y^2)\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + XY\left[(1 - X^2)\frac{\partial Y}{\partial x} - (1 - Y^2)\frac{\partial X}{\partial y}\right]\right\},$$

ce qui, d'après la formule (4), se réduit à

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad (1 + q^2) r - (1 + p^2) t = -\frac{1}{Z^3}\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Mais on sait que l'équation différentielle des lignes de courbure est celle-ci :

$$\left[(1+q^2)s-pqt\right]dy^2+\left[(1+q^2)r-(1+p^2)t\right]dydx-\left[(1+p^2)s-pqr\right]dx^2=0.$$

Au moyen des formules (5) et (6), elle prendra la forme bien plus simple

$$(7) \quad . \ . \quad \frac{\partial X}{\partial y}\,dy^2+\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dxdy-\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx^2=0 \ (^*).$$

Les équations caractéristiques d'un ombilic

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

mises sous la forme

$$(1+q^2)r-(1+p^2)t=0, \qquad (1+p^2)s-pqr=0,$$
$$(1+q^2)s-pqt=0,$$

se réduisent, par les mêmes formules, à celles-ci :

$$(8) \quad . \ . \ . \ . \quad \frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial X}{\partial y}=0,$$

qui sont également bien simples. La première est une conséquence des deux autres, en vertu de l'équation (4).

4. Rappelons maintenant que l'équation qui a pour racines

(*) Cette équation peut s'écrire encore

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\,dx+\frac{\partial X}{\partial y}\,dy\right)dy-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\,dx+\frac{\partial Y}{\partial y}\,dy\right)dx=0,$$

ou

$$\frac{dX}{dx}=\frac{dY}{dy}=\frac{XdX+YdY}{Xdx+Ydy}=\frac{-(ZdZ)}{-Zdx}=\frac{dZ}{dz},$$

théorème connu.

les courbures $\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{R''}$ des sections principales peut s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{R^2} - \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{R} + \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} = 0.$$

Or, en vertu des équations (2) et (3), on a

$$\begin{aligned}(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = -\frac{1}{Z^5}\Big\{ & (1-X^2)\left[(1-Y^2)\frac{\partial X}{\partial x} + XY\frac{\partial Y}{\partial x}\right] \\ & - XY\left[(1-Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} + XY\frac{\partial Y}{\partial y} + (1-X^2)\frac{\partial Y}{\partial x} + XY\frac{\partial X}{\partial x}\right] \\ & + (1-Y^2)\left[(1-X^2)\frac{\partial Y}{\partial y} + XY\frac{\partial X}{\partial y}\right]\Big\} \\ = & -\frac{1}{Z^5}\left[\left[(1-X^2)(1-Y^2) - X^2Y^2\right]\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right] \\ = & -\frac{1}{Z^3}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{rt - s^2}{(1+p^2+q)^2} = \frac{1}{Z^2}\Big\{ & \left[(1-Y^2)\frac{\partial X}{\partial x} + XY\frac{\partial Y}{\partial x}\right]\left[(1-X^2)\frac{\partial Y}{\partial y} + XY\frac{\partial X}{\partial y}\right] \\ & - \left[(1-Y^2)\frac{\partial X}{\partial y} + XY\frac{\partial Y}{\partial y}\right]\left[(1-X^2)\frac{\partial Y}{\partial x} + XY\frac{\partial X}{\partial x}\right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{Z^2}\left[(1-X^2)(1-Y^2)\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - X^2Y^2\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right).$$

L'équation des courbures principales se réduit donc à

$$\frac{1}{R^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)\frac{1}{R} + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0.$$

On en tire ces équations remarquables

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right),$$

$$(10) \quad \ldots \quad \frac{1}{R'R''} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right) = D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right),$$

et comme les premiers membres sont indépendants, évidemment, du système d'axes rectangulaires auquel on rapporte la surface, il en est de même des seconds. Donc :

Les valeurs des expressions

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x},$$

en un point d'une surface, ne varient pas, quel que soit le système d'axes coordonnés rectangulaires auquel on rapporte la surface.

Les courbures sont données par la formule suivante :

$$\frac{1}{R} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + 4\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}}.$$

5. Si l'on prend encore la normale pour axe des z, les axes des x et des y suivant deux tangentes rectangulaires quelconques, on aura

$$X = Y = 0, \quad Z = 1,$$

et

$$r = -\frac{\partial X}{\partial x}, \quad t = -\frac{\partial Y}{\partial y},$$

et les courbures des sections normales tangentes aux axes MX, MY auront pour valeurs

$$\frac{1}{R_1} = r, \quad \frac{1}{R_2} = t,$$

donc

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) = \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''},$$

ce qui ramène au théorème d'Euler sur la courbure de deux sections normales rectangulaires.

Voici une autre application de la formule (9). Traçons sur la surface un contour fermé (C) (ou même un contour composé de deux contours fermés) et cherchons la valeur de l'intégrale

$$\int_s \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) d\sigma_1,$$

étendue à la portion de surface S comprise dans le contour (C) (ou entre les deux contours), $d\sigma_1$ étant la projection sur le plan XY de l'élément $d\sigma$ de la surface S. Cette intégrale, d'après (9), devient

$$-\int_s \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) d\sigma_1,$$

et si on lui applique la formule d'Ostrogradsky pour les aires planes, en considérant X, Y comme des fonctions des variables x, y, on a, C_1 étant la projection du contour C sur XY et ds_1 l'élément du contour C_1,

$$-\int_s \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) d\sigma_1 = \int_{C_1} (X \cos \overline{n_1 X} + Y \cos \overline{n_1 Y}) ds_1,$$

n_1 étant la normale au contour C_1, vers l'intérieur de l'espace enveloppé par ce contour. Mais on voit que, $Z \cos \overline{n_1 Z}$ étant évidemment nul, $X \cos \overline{n_1 X} + Y \cos \overline{n_1 Y}$ représente le cosinus de l'angle α que fait la normale (X, Y, Z) à la surface en un point du contour (C), avec la normale $\overline{n_1}$ ou avec la normale au cylindre projetant du contour (C), ou de l'angle compris, en un point du contour (C), entre le plan tangent à la surface et le plan tangent à ce cylindre. On a donc

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \int_s \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) d\sigma_1 = \int_{C_1} \cos \alpha \, ds_1.$$

Ce théorème renferme une propriété due à Laplace, dans la théorie des phénomènes capillaires ; l'angle α est constant pour la surface capillaire du liquide soulevé dans un tube cylindrique, et l'on a

$$\int_{C_1} \cos \alpha \, ds_1 = C_1 \cos \alpha$$

pour la valeur de l'intégrale double qui mesure, à un facteur constant près, le volume du liquide soulevé ou abaissé dans le tube.

On peut établir des résultats beaucoup plus généraux, mais il convient d'abord de transformer les équations (9) et (10).

6. Dans ces formules, les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}\cdots$ supposent que X et Y soient exprimés totalement en x et y, z étant éliminé au moyen de l'équation de la surface. Si X, Y, Z sont donnés en x, y, z, on doit remplacer les dérivées totales de X, Y, Z, par

$$\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial Y} = \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{X}{Z}\frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{Y}{Z}\frac{\partial X}{\partial z}, \ldots$$

et l'équation (9) devient

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) + \frac{X}{Z}\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{Y}{Z}\frac{\partial Y}{\partial z}$$
$$= -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) + \frac{1}{Z}\left(X\frac{\partial X}{\partial z} + Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Mais, lorsque X, Y, Z sont ainsi exprimés en x, y, z par les formules ordinaires

$$\frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

l'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ est une identité quels que soient x, y, z; donc

$$X\frac{\partial X}{\partial z} + Y\frac{\partial Y}{\partial z} + Z\frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

et il reste simplement

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

équation qui se trouve dans le calcul infinitésimal de M. Boussinesq.

De même, on trouve

$$\frac{1}{R'R''} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{X}{Z}\frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{Y}{Z}\frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{X}{Z}\frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{Y}{Z}\frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= D\left(\frac{X, Y}{x, y}\right) - \frac{X}{Z} D\left(\frac{X, Y}{z, y}\right) - \frac{Y}{Z} D\left(\frac{X, Y}{x, z}\right) = \frac{1}{Z}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

On a donc définitivement cette expression :

$$(13) \quad \ldots \quad \frac{1}{R'R''} = \frac{1}{Z}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix}$$

On remarque immédiatement que le premier membre étant indépendant du choix des axes, il en est de même du second, et que, en particulier, le second membre ne doit pas changer par la permutation circulaire (x, y, z), (X, Y, Z), donc encore

$$(14) \quad \ldots \quad \frac{1}{R'R''} = \frac{1}{X}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{Y}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

A cause des valeurs

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}, \quad \frac{X}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{1}{G},$$

il résulte des équations (13) et (14) un théorème remarquable sur les déterminants des fonctions, savoir

$$\frac{1}{X} D\left(\frac{F, Y, Z}{x, y, z}\right) = \frac{1}{Y} D\left(\frac{F, Z, X}{x, y, z}\right) = \frac{1}{Z} D\left(\frac{F, X, Y}{x, y, z}\right).$$

7. L'équation des surfaces d'aire minimum est

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0,$$

comme on sait. On a donc, d'après la formule (9),

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

pour une forme de l'équation de ces surfaces. Cette équation revient à exprimer cette propriété que

$$X dy - Y dx$$

doit être une différentielle exacte $d\Psi$ par rapport à x et y, et si l'on détermine la normale par les angles θ et φ qui représentent sa direction sur une sphère de rayon 1, on aura

$$\sin\theta \cos\varphi \, dy - \sin\theta \sin\varphi \, dx = d\Psi,$$

pour l'équation de ces surfaces, sous la forme même que Riemann lui a donnée.

Si l'on conçoit, au contraire, que l'on introduise les variables x, y, z dans les cosinus directeurs de la normale, l'équation des surfaces d'aire minimum deviendra

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

8. Les formules (12), (13) et (14) conduisent à des résultats intéressants, lorsqu'on les combine avec une formule remarquable due à M. Stokes, qui ramène une intégrale *superficielle* à une intégrale *linéaire :* cette formule, reproduite par M. W. Thomson et par Clerk Maxwell (*), peut se démontrer d'une manière très simple, comme il suit :

(*) C. NEUMANN (*Die Electrischen Kräfte*) démontre cette formule pour le cas où le circuit (C) est plan et infiniment petit, la surface S plane

Soient S une portion de surface limitée par un contour (C); $d\sigma$ un élément de surface; X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale à la surface en ce point; U, V, W des fonctions données de (x, y, z). La formule qu'il s'agit d'établir est celle-ci :

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_S \left[X\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right] d\sigma \\ &\qquad = \int_{(C)} (U dx + V dy + W dz). \end{aligned} \right.$$

Pour cela, mettons cette dernière intégrale, à cause de la relation $dz = p dx + q dy$, sous la forme

$$\int_C \left[(U + pW) dx + (V + qW) dy\right],$$

et appliquons la formule de Green, en appelant S_1, C_1, $d\sigma_1$ les projections sur le plan XY de S, C, $d\sigma$. Nous aurons

$$\begin{aligned} &\int_C \left[(V + pW) dx + (V + qW) dy\right] \\ &= \int_{S_1} \left[D_x (V + qW) - D_y (U + pW) \right] d\sigma_1 \\ &= \int_{S_1} \left[\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial y} - q\frac{\partial U}{\partial z} + W\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) \right. \\ &\quad \left. + q\left(\frac{\partial W}{\partial x} + p\frac{\partial W}{\partial z}\right) - p\left(\frac{\partial W}{\partial y} + q\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right] d\sigma_1. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad p = -\frac{X}{Z}, \qquad q = -\frac{Y}{Z}, \qquad \frac{d\sigma_1}{Z} = d\sigma;$$

donc l'intégrale devient

$$\int_S \left(Z\frac{\partial V}{\partial x} - X\frac{\partial V}{\partial z} - Z\frac{\partial U}{\partial y} + Y\frac{\partial U}{\partial z} - Y\frac{\partial W}{\partial x} + X\frac{\partial W}{\partial y}\right) d\sigma,$$

ce qui n'est autre chose que le premier membre de l'équation (15).

9. Nous allons généraliser cette formule de Stokes. Désignons par L, M, N d'autres fonctions de (x, y, z), et observons que le long du contour (C), l'on a

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial y}dy + \frac{\partial L}{\partial z}dz, \text{ etc},$$

de sorte que

$$\int_C (UdL + VdM + WdN) = \int_C \left[\left(U\frac{\partial L}{\partial x} + V\frac{\partial M}{\partial x} + W\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx + \cdots\right].$$

Transformant cette expression par la formule (15), il faut remplacer U par

$$U\frac{\partial L}{\partial x} + V\frac{\partial M}{\partial x} + W\frac{\partial N}{\partial x}, \text{ etc.},$$

et par conséquent $\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}$ par

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial L}{\partial z} + V\frac{\partial M}{\partial z} + W\frac{\partial N}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial L}{\partial y} + V\frac{\partial M}{\partial y} + W\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial M}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

$$= D\left(\frac{U, L}{y, z}\right) + D\left(\frac{V, M}{y, z}\right) + D\left(\frac{W, N}{y, z}\right).$$

On transformera de même les autres termes sous le signe $\int$, et l'on aura ainsi

$$\int_{(C)} (UdL + VdM + WdN)$$

$$= \int \left[X\, D\left(\frac{U, L}{y, z}\right) + Y\, D\left(\frac{U, L}{z, x}\right) + Z\, D\left(\frac{U, L}{x, y}\right)\right] d\sigma + \cdots,$$

ce qui donnera enfin l'équation cherchée

$$
(16)\ldots\left\{
\begin{aligned}
&\int_{C}(\mathrm{U}d\mathrm{L}+\mathrm{V}d\mathrm{M}+\mathrm{W}d\mathrm{N})=\int_{s}\begin{vmatrix}\mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z}\\ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\\ \frac{\partial \mathrm{L}}{x} & \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}\end{vmatrix} d\sigma\\
&+\int_{s}\begin{vmatrix}\mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z}\\ \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\\ \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z}\end{vmatrix} d\sigma+\int_{s}\begin{vmatrix}\mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z}\\ \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\\ \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z}\end{vmatrix} d\sigma.
\end{aligned}\right.
$$

On peut évidemment écrire cette équation sous la forme abrégée

$$
\begin{aligned}
&\int_{(C)}(\mathrm{U}d\mathrm{L}+\mathrm{V}d\mathrm{M}+\mathrm{W}d\mathrm{N})\\
&=\int_{s}\frac{1}{\mathrm{G}}\left[\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{F},\mathrm{U},\mathrm{L}}{x,y,z}\right)+\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{F},\mathrm{V},\mathrm{M}}{x,y,z}\right)+\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{F},\mathrm{W},\mathrm{N}}{x,y,z}\right)\right]d\sigma.
\end{aligned}
$$

On voit facilement que le premier membre de cette égalité ne dépend nullement de la fonction F, c'est-à-dire de la forme de la surface que l'on fait passer par le contour (C); le second membre n'en dépend donc pas non plus, il reste invariable quelle que soit la fonction F.

A cause de l'indétermination des fonctions U, V, W, L, M, N, cette équation (16) peut donner une infinité de relations particulières et de valeurs intéressantes d'intégrales doubles ramenées à des intégrales simples. Nous observerons seulement ici que, si l'on regarde V et W comme des constantes, on a cette relation, d'ailleurs facile à tirer de (15),

$$
\int_{(C)}\mathrm{U}d\mathrm{L}=\int_{s}\frac{1}{\mathrm{G}}\,\mathrm{D}\left(\frac{\mathrm{F},\mathrm{U},\mathrm{L}}{x,y,z}\right)d\sigma.
$$

10. Venons aux applications des formules (15) et (16). Si dans la première nous prenons, ce qui est permis,

$$U = X, \ V = Y, \ W = Z,$$

elle devient

$$\int_S \left[X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + Y\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right] d\sigma$$

$$= \int_{(C)} (X dx + Y dy + Z dz).$$

L'équation $X dx + Y dy + Z dz = 0$ est évidemment vérifiée tout le long du contour (C). Le premier membre de l'équation est donc nul, et comme le raisonnement s'applique à une portion fermée quelconque de la surface S, il faut que la fonction sous le signe $\int_S$ soit nulle en chaque point de la surface. On a donc, en chaque point d'une surface continue, la relation

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) = 0,$$

et par conséquent, *pour que des fonctions* X, Y, Z *de* x, y, z *puissent représenter les cosinus directeurs de la normale à une même surface, il est nécessaire que ces fonctions vérifient l'égalité précédente.* On retrouve ainsi, par une voie singulière, une proposition bien connue.

11. Désignons par r la distance du point (x, y, z) à l'origine des coordonnées, par n un nombre entier, et posons maintenant

$$V = -\frac{z}{r^{n+1}}, \quad W = \frac{y}{r^{n+1}}, \quad U = 0.$$

A cause de la relation $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, nous aurons

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \ \ldots$$

et par suite

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{2}{r^{n+1}}-\frac{(n+1)}{r^{n+2}}\frac{(y^2+z^2)}{r}=\frac{2}{r^{n+1}}-\frac{n+1}{r^{n+3}}(r^2-x^2)$$

$$=\frac{(n+1)x^2}{r^{n+3}}-\frac{n-1}{r^{n+1}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}=\frac{(n+1)\,xy}{r^{n+3}},\qquad \frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{(n+1)xz}{r^{n+3}}.$$

L'équation (15) devient ainsi

$$\int_{C}\frac{ydz-zdy}{r^{n+1}}=\int_{S}\left[-\frac{(n-1)X}{r^{n+1}}+\frac{(n+1)}{r^{n+3}}(xX+yY+zZ)x\right]d\sigma.$$

Mais $xX+yY+zZ$ représente la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur le plan tangent à la surface au point (x, y, z); nous la désignerons par P, et nous aurons

$$(17)\ldots\begin{cases}\displaystyle\int_{(C)}\frac{ydz-zdy}{r^{n+1}}=\int_{S}\left[\frac{(n+1)\,Px}{r^{n+3}}-\frac{(n-1)X}{r^{n+1}}\right]d\sigma,\\ \text{et de même}\\ \displaystyle\int_{C}\frac{zdx-xdz}{r^{n+1}}=\int_{S}\left[\frac{(n+1)\,Py}{r^{n+3}}-\frac{(n-1)Y}{r^{n+1}}\right]d\sigma,\\ \displaystyle\int_{C}\frac{xdy-ydx}{r^{n+1}}=\int_{S}\left[\frac{(n+1)\,Pz}{r^{n+3}}-\frac{(n-1)Z}{r^{n+1}}\right]d\sigma.\end{cases}$$

Ces formules, qui établissent des relations remarquables entre une intégrale superficielle et une intégrale linéaire, ont été données par Ampère dans sa *Théorie des phénomènes électro-dynamiques*, mais pour le cas seulement où la surface (S) est un plan. On voit qu'elles subsistent, quelle que soit la surface aboutissant au contour (C); la distance de l'origine au plan du circuit est remplacée par la distance de l'origine au plan tangent.

12. Montrons maintenant comment les formules ci-dessus

conduisent facilement à diverses relations remarquables établies par M. H. Schwarz. Si dans l'équation (15) nous faisons

$$U = yZ - zY, \qquad V = zX - xZ, \qquad W = xY - yX,$$

nous aurons, eu égard au sens exact des dérivées partielles dans la formule (15),

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = x\frac{\partial Y}{\partial y} - y\frac{\partial X}{\partial y} - 2X - z\frac{\partial X}{\partial z} + x\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$= -2X + x\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - \left(x\frac{\partial X}{\partial x} + y\frac{\partial X}{\partial y} + z\frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

Opérant de même le calcul des autres binômes sous le signe d'intégration, multipliant par X, Y, Z et ajoutant, on a

$$X\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{dz}\right) + Y\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + Z\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{dy}\right) = -2(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

$$+ (xX + yY + zZ)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) - x\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} + Z\frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \dots$$

et comme on a, ainsi qu'on l'a vu,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \qquad X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} + Z\frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \dots$$

$$xX + yY + zZ = P, \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = -\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{K''}\right),$$

on aura

$$X\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \dots = -2 - P\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right).$$

L'équation (15) nous donnera donc

$$\int_s \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) P d\sigma + 2S$$

$$= -\int_c \left[(yZ - zY)dx + (zX - xZ)dy + (xY - yX)dz\right].$$

Il reste à interpréter géométriquement l'intégrale au second membre. La quantité sous le signe $\int$ s'écrit

$$X(zdy - ydz) + Y(xdz - zdz) + Z(ydx - xdy).$$

Or, on sait que $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ représente l'aire de la projection, sur le plan XY, du triangle qui a pour sommet l'origine O des coordonnées et pour base l'élément ds du contour (C); de même $\frac{1}{2}(ydz - zdy)$ sur le plan YZ, $\frac{1}{2}(zdx - xdz)$ sur le plan XZ. La quantité $(ydz - zdy)X + (zdx - xdz)Y + (xdy - ydx)Z$ est donc le double de la projection de ce triangle sur le plan normal à X, Y, Z, c'est-à-dire sur le plan tangent à la surface S le long de l'élément ds, cette projection étant considérée comme positive ou négative suivant que la direction (X, Y, Z) et la normale au plan du triangle, menée du côté où la rotation du rayon vecteur se voit de gauche à droite, comprennent un angle aigu ou obtus. Si donc nous désignons par $d\zeta$ l'élément de la surface conique du sommet O qui s'appuie sur le contour (C), par φ l'angle entre les deux normales indiqué plus haut, l'équation ci-dessus pourra s'écrire

$$\int_{s}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) P d\sigma + 2S = 2\int_{(C)} \cos\varphi \, d\zeta,$$

ou

$$(18) \quad . \quad . \quad S = -\frac{1}{2}\int_{s}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) P d\sigma + \int_{(C)} \cos\varphi \, d\zeta.$$

Cette relation, qui revient au fond à celle qu'a donnée M. Jellett dans le *Journal de Liouville*, a été établie par M. Schwarz par une voie toute différente, dans les additions publiées à la suite de son mémoire, dans le recueil des œuvres de l'éminent géomètre.

13. Voici un cas particulier intéressant du problème précédent: Supposons un plan fixe sur lequel roule une surface fixée par un point. La courbe de contact est une polhodie sur la surface S, une herpolhodie sur le plan P. L'intégrale $\int_{C} \cos\varphi \, d\zeta$ représente précisément l'aire Σ de l'herpolhodie comprise entre la courbe et les deux rayons vecteurs qui répondent à un tour entier de la

polhodie. On a donc, *entre l'aire Σ de l'herpolhodie et l'aire* S *comprise dans l'intérieur de la polhodie de la surface roulante, cette relation remarquable :*

$$(19). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \Sigma - S = \frac{1}{2}\int_S \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) P d\sigma.$$

En particulier, si la surface roulante est une surface d'aire minimum, $\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0$, et $\Sigma = S$, donc : *Si une surface d'aire minimum roule autour d'un point fixe en s'appuyant sur un plan tangent fixe, de façon que la courbe de contact soit fermée sur la surface, l'aire de l'herpolhodie sera égale à l'aire de la polhodie.*

Si la surface est à courbure moyenne constante, on a

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = \frac{1}{a}, \qquad \int_S P d\sigma = 3V,$$

V étant le volume compris entre la surface S et le cône de sommet O qui passe par la polhodie. Donc

$$\Sigma - S = \frac{3}{2a} V.$$

L'équation (19) est applicable à la polholdie de Poinsot. On a ici

$$X = \frac{Px}{a^2}, \quad Y = \frac{Py}{b^2}, \quad Z = \frac{Pz}{c^2}, \quad \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{dy} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{P}{a^2}\left[1 + \frac{x}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right], \quad \frac{1}{P^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{P^3 x}{a^4},$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{P}{a^2}\left[1 - \frac{P^2 x^2}{a^4}\right] = \frac{P^3}{a^2}\left[\frac{1}{P^2} - \frac{x^2}{a^4}\right] = \frac{P^3}{a^2}\left(\frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{P^3}{b^2}\left(\frac{z^2}{c^4} + \frac{x^2}{a^4}\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{P^3}{c^2}\left(\frac{x^3}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)$$

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = - P^3\left[\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^4} + \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^4} + \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z^2}{c^4}\right]$$

$$= - \frac{P^3}{a^2 b^2 c^2}\left[(b^2 + c^2)\frac{x^2}{a^2} + \cdots\right]$$

$$= - \frac{P^3}{a^2 b^2 c^2}\left[(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - (x^2 + y^2 + z^2)\right].$$

ou enfin

$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = -\frac{P^5}{a^2b^2c^2}(a^2 + b^2 + c^2 - r^2).$$

On a donc, entre l'aire de l'herpolhodie et celle de la polhodie, l'équation

$$\Sigma - S = -\frac{1}{2a^2b^2c^2}\int_S (a^2 + b^2 + c^2 - r^2)P^4\, d\sigma.$$

Mais on arrive à un résultat plus simple, dans ce cas particulier, en appliquant directement la formule (15). Appelons ϖ la distance du centre au plan tangent fixe de l'ellipsoïde. On a, en chaque point du contour C,

$$X = \frac{\varpi x}{a^2}, \quad Y = \frac{\varpi y}{b^2}, \quad Z = \frac{\varpi z}{c^2},$$

donc

$$\Sigma = \frac{1}{2}\int_C \Big[X(ydz - zdy) + Y(zdx - xdz) + Z(xdy - ydx)\Big]$$

$$= \frac{\varpi}{2}\int_{(C)} \Big[(ydz - zdy)\frac{x}{a^2} + (zdx - xdz)\frac{y}{b^2} + (xdy - ydx)\frac{z}{c^2}\Big]$$

$$= \frac{\varpi}{2}\int_C \Big[\Big(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big)yzdx + \Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\Big)zxdy + \Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big)xydz\Big].$$

Prenons donc, dans la formule (15),

$$U = \Big(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\Big)yz, \quad V = \Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\Big)zx, \quad W = \Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\Big)xy;$$

d'où

$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = \Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\Big)x = \frac{3x}{a^2} - \Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big)x,$$

de même les deux autres

$$\frac{\partial U}{dz} - \frac{\partial W}{dx} = \frac{3y}{b^2} - \Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big)y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3z}{c^2} - \Big(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\Big)z$$

et, par suite,

$$\Sigma = \frac{\varpi}{2}\int_s \left[\frac{3Px^2}{a^4} - \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\frac{Px^2}{a^2} + \cdots\right] d\sigma$$

$$= \frac{3\varpi}{2}\int_s \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right) d\sigma - \frac{\varpi}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_s P d\sigma$$

$$= \frac{3\varpi}{2}\int_s \frac{d\sigma}{P} - \frac{3\varpi}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) V,$$

V ayant la même signification; donc enfin, l'aire de l'herpolhodie pour un tour entier de la polhodie a pour expression

$$(20) \quad \ldots \quad \Sigma = \frac{3\varpi}{2}\left[\int_s \frac{d\sigma}{P} - \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) V\right],$$

résultat assez simple.

14. Comme application de l'équation (16), nous prendrons

$$U = yZ - zY, \quad V = zX - xZ, \quad W = xY - yX,$$
$$L = X, \quad M = Y, \quad N = Z.$$

Nous aurons donc

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ y\frac{\partial Z}{\partial x} - z\frac{\partial Y}{\partial x}, & y\frac{\partial Z}{\partial y} - z\frac{\partial Y}{\partial y} + Z, & y\frac{\partial Z}{\partial z} - z\frac{\partial Y}{\partial z} - Y \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= y\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix} - z\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ 0 & Z & -Y \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Les deux premiers termes se réduisent, par l'équation (14), à

$$\frac{yY + zZ}{R'R''},$$

le troisième peut s'écrire

$$-\frac{\partial X}{\partial x} + X\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right);$$

donc

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{yY + zZ}{R'R''} - \frac{\partial X}{\partial x} + X\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}\right).$$

On aura de même

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial M}{\partial x} & \frac{\partial M}{\partial y} & \frac{\partial M}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{zZ + xX}{R'R''} - \frac{\partial Y}{\partial y} + Y\left(X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y} + Z\frac{\partial Y}{\partial z}\right),$$

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial x} & \frac{\partial N}{\partial y} & \frac{\partial N}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{xX + yY}{R'R''} - \frac{\partial Z}{\partial z} + Z\left(X\frac{\partial Z}{\partial x} + Y\frac{\partial Z}{\partial y} + Z\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

et le second membre de l'équation (16) deviendra

$$\int_s 2\,\frac{xX + yY + zZ}{R'R''}\,d\sigma$$

$$-\int_s \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) d\sigma + \int_s X\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial x} + Z\frac{\partial Z}{\partial x}\right) d\sigma;$$

les trois dernières intégrales sont nulles, $xX + yY + zZ = P$, donc enfin l'équation (16) prendra la forme

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\int_{S} \frac{Pd\sigma}{R'R''} + \int_{S} \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) d\sigma \\ & = \int_{C} \left[(yZ - zY)dX + (zX - xZ)dY + (xY - yX)dZ\right]. \end{aligned} \right.$$

Il reste à interpréter géométriquement cette dernière intégrale. Pour cela, écrivons la quantité sous le signe $\int$,

$$x(YdZ - ZdY) + y(ZdX - XdZ) + z(XdY - YdX).$$

La droite dont les cosinus directeurs λ, μ, ν sont donnés par

$$\frac{\lambda}{YdZ - ZdY} = \frac{\mu}{ZdX - XdZ} = \frac{\nu}{XdY - YdX} = \pm \frac{1}{\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}$$

est perpendiculaire aux deux normales infiniment voisines (X, Y, Z), $(X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ)$; c'est l'intersection de deux plans tangents infiniment voisins ou la génératrice G de la développable circonscrite à la surface S le long de la courbe C; $\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$ est l'angle des deux normales infiniment voisines, $\frac{ds}{f}$, f désignant le rayon de flexion de la surface suivant l'arc ds. Enfin $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ sont les cosinus directeurs du rayon vecteur allant de l'origine au point (x, y, z); donc

$$x(VdZ - ZdY) + \cdots = \frac{\lambda x + \mu y + \nu z}{f} ds = \frac{rds}{f} \cos \overline{rG},$$

et l'on a enfin

$$(22)\ .\ .\ 2\int \frac{Pd\sigma}{R'R''} + \int \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) d\sigma = \int_{C} \frac{r \cos \overline{rG}}{f} ds.$$



15. Si dans l'équation particulière

$$\int_C U dL = \int_S \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \end{vmatrix} d\sigma,$$

on pose $V = X$, $L = Y$, le déterminant sous le signe $\int$ devient

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{Z}{R'R''},$$

en vertu de la formule (13), et l'équation précédente prend la forme

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad \int_S \frac{Z d\sigma}{R'R''} = \int_C X dY.$$

On sait que $\frac{d\sigma}{R'R''}$ représente l'élément de surface sphérique de rayon 1 qui correspond à $d\sigma$ dans la représentation sphérique de Gauss; $\frac{Z d\sigma}{R'R''}$ est la projection de cet élément dans le plan XY, dans lequel se trouvent les deux axes rectangulaires quelconques sur lesquels la normale donne les projections X, Y.

On peut donc énoncer ce théorème :

Si l'on circonscrit sur une surface quelconque une portion S *par un contour fermé* C, *et qu'on la reporte sur la sphère de rayon 1 par la transformation de Gauss, l'aire de la projection de la transformée sur un plan quelconque s'obtient en prenant le long du contour* C *l'intégrale de* XdY, X *et* Y *étant les cosinus des angles que fait la normale avec deux axes rectangulaires dans le plan donné.*

16. Si dans cette même équation nous prenons

$$U = \frac{X}{Z}, \quad L = \frac{Y}{Z},$$

nous aurons

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} & \frac{\partial L}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{1}{Z}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{X}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{1}{Z}\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{X}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{1}{Z}\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{X}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{1}{Z}\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{Y}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{1}{Z}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{Y}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{1}{Z}\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{Y}{Z^2}\frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{Z^2}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix} - \frac{X}{Z^3}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \end{vmatrix} - \frac{Y}{Z^3}\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{Z}\,\frac{1}{R'R''} + \frac{X^2}{Z^3}\,\frac{1}{R'R''} + \frac{Y^2}{Z^3}\,\frac{1}{R'R''} = \frac{1}{Z^3}\,\frac{1}{R'R''}.$$

L'équation du n° 15 devient donc, par ces substitutions,

$$\int_{s} \frac{1}{Z^3}\,\frac{d\sigma}{R'R''} = \int_{c} \frac{X}{Z}\,d.\frac{Y}{Z} = \int_{c} p\,dq,$$

d'après les relations $p = -\frac{X}{Z}$, $q = -\frac{Y}{Z}$.

On a donc enfin

(24). . . . . . $$\int_{s} \frac{1}{Z^3}\,\frac{d\sigma}{R'R''} = \int_{c} p\,dq.$$

résultat difficile à interpréter géométriquement.

UN CAS
DE
RÉTINITE DIABÉTIQUE

PAR

M. le Dr DE LANTSHEERE.

Mme X..., âgée de 53 ans, se présenta à ma consultation le 7 septembre 1893, se plaignant d'avoir perdu la vue de l'œil droit depuis six jours. Elle accusait un voile, comme un nuage de fumée, qui était suspendu au-devant d'elle.

La malade comptait les doigts à 3 mètres; elle ne pouvait lire, et ajoutait à l'appui qu'il lui était excessivement difficile de compter les pièces de monnaie qu'elle recevait dans son magasin.

La pupille avait son diamètre normal; elle réagissait bien à la lumière. L'aspect extérieur de l'œil ne présentait aucun signe particulier. Les milieux réfringents étaient parfaitement clairs.

A l'examen ophtalmoscopique, je trouvai, à la place de la papille du nerf optique, un gonflement opaque, grisâtre, qui s'étendait sur la rétine, de façon à augmenter le diamètre ordinaire de la papille d'un tiers environ de son étendue. Les vaisseaux avaient en partie disparu du centre; les veines se voyaient vers la périphérie, plus gonflées, foncées. Au pourtour immédiat de la papille, principalement vers le milieu du quart inférieur du côté temporal, la rétine était également trouble.

Le champ visuel était légèrement rétréci; il n'y avait pas de scotome central.

En interrogeant la malade, j'appris qu'elle était atteinte de

diabète depuis bientôt quatre ans. Elle me dit se trouver mieux depuis à peu près sept à huit mois, avoir gagné beaucoup en force et en poids, et n'avoir plus à se plaindre d'aucun symptôme extérieur gênant.

Quelques jours avant de perdre la vue, la malade avait été incommodée par moments, à cause d'une diplopie passagère dont je ne retrouvai plus de traces à l'examen.

M. le Dr Van Cutsem, à qui j'adresse mes vifs remerciements pour les renseignements qu'il m'a communiqués, m'écrit que le 25 août 1892, l'urine renfermait 10 grammes de sucre par litre. A la date du 1er juin 1893, il n'a plus trouvé de glucose; cette situation s'est maintenue jusqu'au 20 juillet. Le 17 août, le sucre a reparu; il a ensuite diminué progressivement, et ni mon confrère ni moi nous n'en avons plus trouvé jusqu'au 14 octobre. Le 12 novembre, j'ai de nouveau découvert quelques traces de glucose.

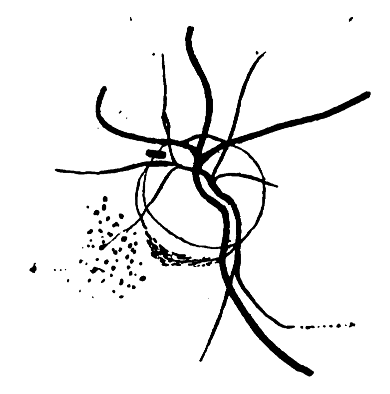
Jamais M. Van Cutsem n'a constaté la présence d'albumine, et mes recherches personnelles ont été toujours négatives dans ce sens.

Cinq jours après, la vision s'est relevée à $^5/_{36}$ aux tableaux de Snellen. A l'ophtalmoscope, je découvre cette fois beaucoup plus clairement les bords de la papille du nerf optique, qui est encore grise rougeâtre; le gonflement a beaucoup diminué et n'occupe plus que quelques rayons vers le centre. Les veines sont encore volumineuses, foncées, mais visibles du centre de la papille à la périphérie. Une petite tache hémorragique est située au bord de la papille, le long de la branche temporale supérieure de la veine centrale. La rétine paraît cette fois très légèrement soulevée, opaque, grisâtre dans le voisinage immédiat de la papille, vers le quart inférieur du côté temporal. A ce niveau existent des taches plus pâles, elliptiques et rondes, irrégulièrement disposées, en nombre assez considérable.

Dix jours plus tard, la rétine avait une teinte plus uniforme, et au niveau de la partie atteinte on voyait des taches petites, blanches, claires, de dimension variable. La papille était encore rosée, les bords étaient nettement limités.

Depuis, la rétine a repris sa coloration normale, et ces taches ont successivement diminué de volume.

Le 15 novembre, il reste sur un espace peu considérable, à une petite distance du bord de la papille, entre les branches temporales supérieure et inférieure de l'artère centrale, des foyers blancs excessivement fins, dont les plus étendus ont à peine le volume d'une tête d'épingle ordinaire; ils ont un aspect brillant comme une légère couche de givre très fine et peu épaisse. La papille est blanche, décolorée du côté nasal, saillante du côté temporal, surtout dans le bas; elle se trouve en voie d'atrophie (voir figure) (*).



L'acuité visuelle est de $^5/_{24}$. Le champ visuel est rétréci; les couleurs ne sont plus perçues dans leurs limites normales.

Les avis sont encore partagés au sujet de la forme et de la nature des inflammations de la rétine qu'on observe au cours du diabète. D'ailleurs aussi, les cas semblent rares. Des observations ont été publiées il y a déjà longtemps par Desmarres, Jaeger, Noyes, Galezowski, Haltenhoff, Leber.

Fuchs (*Lehrbuch der Augenheilkunde*, 1889) écrit que la rétinite diabétique n'offre pas de signes caractéristiques, qu'elle présente souvent le même aspect que la rétinite albuminurique.

(*) Image droite actuelle à l'ophtalmoscope. Les lignes marquées en traits fins sont les artères; celles qui sont en traits forts, les veines; les points à droite, les foyers blancs.

De Wecker (*Traité complet d'ophtalmologie*, 1889) a confirmé à sa clinique que les rétinites diabétiques, chez les malades non albuminuriques, étaient d'une rareté excessive. D'après lui, l'image ophtalmoscopique de la rétinite diabétique est celle d'une rétinite apoplectiforme simple ou mélangée d'un nombre inusité de foyers de dégénérescence. Galezowsky (*Traité pratique des maladies des yeux*, 1889) dit que nous connaissons aujourd'hui des faits incontestables, quoique rares, de rétinite glycosurique. Elle s'accuse par de simples apoplexies, avec des épanchements fréquents dans le corps vitré, ou d'autres fois des foyers apoplectiques et des taches blanches coexistent dans le fond de l'œil, au voisinage de la macula. Avec Mackenzie, il accorde moins de valeur aux foyers blancs, plus aux épanchements de sang dans le corps vitré.

Leber, dans *Græfe Sæmisch*, est d'avis que l'inflammation rétinienne n'est pas toujours la même, qu'elle présente peu de signes distinctifs qui font, de préférence, soupçonner le diabète.

Enfin, M. le professeur Hirschberg, de Berlin, s'est, dans ces dernières années, particulièrement occupé des inflammations de la rétine dans le diabète (*Deutsche medic. Wochenschr.*, 1890, nos 51 et 52).

Il cherche à déterminer les diverses formes, et décrit deux types principaux : 1° Une rétinite avec des foyers petits, clairs, la plupart du temps aussi des hémorragies (rétinite ponctuée diabétique). Elle est toujours double, le trouble de la vue apparaît progressivement et le nerf optique ne participe pas à l'inflammation; 2° Une rétinite hémorragique avec ses conséquences inflammatoires et des dégénérescences.

Il lui semble surtout nécessaire de décrire et de montrer plus exactement la première forme, pour la distinguer définitivement de la rétinite albuminurique. Dans cette dernière, il y a un trouble et un gonflement de la papille du nerf optique, duquel part un léger voile qui recouvre la rétine sur un espace de plusieurs millimètres; des taches plus étendues et des hémorragies plus fortes existent dans les parties atteintes; les foyers plus petits sont disposés en étoile.

Il croit que devant ses observations *positives*, concordant avec celles d'autres auteurs, il n'y a pas lieu d'admettre cette idée *négative :* « qu'on rencontre dans le diabète sucré toute espèce d'affections oculaires qui se présentent ordinairement, mais aucune qui se comporte vis-à-vis de lui comme, par exemple, la rétinite albuminurique dans l'albuminurie, ou la rétinite syphilitique dans la syphilis. »

Il admet une rétinite diabétique essentielle qui, à l'examen ophtalmoscopique, offre quelques points de ressemblance avec la rétinite albuminurique : il s'agit alors de complications dans la forme principale de fortes hémorragies.

L'albuminurie survient elle-même comme conséquence du diabète : il n'y a donc rien d'étonnant à rencontrer des formes mixtes dans lesquelles, à côté des foyers caractéristiques du diabète, on voit les lésions albuminuriques de la rétine et du nerf optique.

Dans l'analyse des symptômes du cas que je publie plus haut, je trouve des particularités à signaler à la critique de ceux qui s'occupent des inflammations de la rétine dans le diabète.

A première vue, l'examen ophtalmoscopique pouvait faire croire à une papillite, liée à une maladie du cerveau. La papille du nerf optique a donc dûment participé aux troubles oculaires; il y aurait à ce point de vue un rapprochement avec la rétinite néphrétique, malgré que jamais, ni M. le Dr Van Cutsem ni moi nous n'avons trouvé de l'albumine dans les urines et que, dès le début, mon attention a été attirée là-dessus. La papille est actuellement en voie d'atrophie.

Les foyers blancs de dégénérescence sont restés limités à un seul rayon de la rétine. Ils occupent un espace peu considérable, un quart à peine de l'étendue de la rétine, près du bord temporal de la papille. Ils sont situés les uns près des autres, sans rapports réguliers. Leur forme était variable : ronde ou elliptique. Ils étaient généralement bien découpés ou leurs bords présentaient des dentelures excessivement minces. Ils ont progressivement diminué de volume et se présentent comme une fine poussière éclatante et brillante sur le fond rouge de l'œil.

Je crois devoir faire remarquer que, malgré une vive attention, je n'ai jamais vu des hémorragies rétiniennes depuis le début jusqu'aujourd'hui.

Il est bon aussi de savoir que la malade a éprouvé une diplopie passagère avant l'apparition des symptômes intra-oculaires. Les paralysies des muscles de l'œil sont très fréquentes dans le diabète.

Le trouble de la vue, qui s'est déclaré très intense et subitement, s'est amélioré progressivement depuis. Les limites du champ visuel normal sont un peu rétrécies.

DE L'ARTHRODÈSE

PAR

MM. les Drs DE BUCK & VANDERLINDEN.

Quand un procédé chirurgical, un moyen thérapeutique nouveaux viennent enrichir le patrimoine de nos connaissances médicales, il est utile et même nécessaire de faire connaître tous les faits, toutes les observations qui s'y rapportent, afin de pouvoir en déterminer la valeur.

Cette règle est surtout importante quand il s'agit de se former un jugement rationnel sur la valeur d'un procédé chirurgical nouveau. Dans ce dernier cas, il faut encore, outre une constatation immédiate, l'observation des résultats éloignés.

Ces considérations, ainsi que l'exemple de la plupart, nous pourrions dire de tous les chirurgiens actuels, relatant leurs opérations d'arthrodèse, nous ont engagés à exposer, devant la Société scientifique, le résultat d'une opération de ce genre pratiquée pour un pied bot paralytique.

H. M..., âgé de 14 ans, se présente à notre établissement chirurgical de Gendbrugge au mois de mars de cette année. L'affection dont il souffre a débuté à l'âge de 2 ans, à la suite d'une poliomyélite aiguë. Il en est résulté une atrophie de la jambe droite avec pied bot équin-varus. Depuis lors, l'affection a continuellement progressé. La paralysie des muscles de la jambe, suivie de leur atrophie, s'est accentuée. L'aponévrose plantaire s'est rétractée; cette rétraction, en même temps qu'elle imprime à la face plantaire du pied une excavation exagérée, concourt à maintenir celui-ci dans une position vicieuse d'adduction, et à rendre plus apparente une saillie osseuse anormale, formée par la tête de l'astragale, qui en est la conséquence.

Quand le patient essaie de se mouvoir, appuyé sur une

béquille, la pointe du pied paralysé tombe en avant en même temps que son bord externe vient toucher le sol.

Les appareils les plus divers ayant été essayés sans fournir de résultat fonctionnel satisfaisant, le malade s'adresse à nous pour être délivré de cette infirmité gênante.

En présence de cet état, on peut se demander quel est le traitement le plus favorable à instituer.

Les déformations osseuses et ligamentaires, qui ne sont ici vraisemblablement que la conséquence de la longue durée de l'infirmité, nous font rejeter d'abord la possibilité d'un redressement permanent à obtenir au moyen d'appareils ou de ténotomies simples.

Nous ne pouvons guère, par ces interventions, songer à remplir les indications nécessaires à la cure définitive de notre malade.

Les indications sont les suivantes :

1° Mettre l'articulation tibio-tarsienne, ballante par suite de la paralysie musculaire, dans une position fixe favorable au fonctionnement de la jambe;

2° Remédier, en même temps qu'au ballotement articulaire et à l'équinisme, aux déformations consécutives du varus et du pied creux.

La première indication est certainement la plus importante. En effet, supposons compensées les altérations du varus et du pied creux, le malade n'en reste pas moins condamné à porter constamment des appareils destinés à fixer l'article pour lui permettre la marche, vu que la paralysie infantile a entamé la presque totalité des muscles de la jambe. On comprend que, dans ces conditions, il ne serait pas resté au patient de force suffisante pour mouvoir l'organe après son redressement.

Une opération unique ne pouvant évidemment remplir les diverses indications auxquelles il s'agit de porter remède, nous avons recouru aux interventions suivantes :

Section du tendon d'Achille et de l'aponévrose plantaire; dans la même séance, arthrodèse de l'articulation tibio-tarsienne, faite par le côté externe et combinée avec l'ablation d'une crête osseuse préastragalienne, s'opposant à la réduction facile du pied. Pas de

suture osseuse ni de drainage. Suture au catgut des couches externes et application d'un appareil plâtré.

Actuellement, après avoir observé le malade durant dix mois environ, nous pouvons qualifier de très satisfaisant le résultat obtenu. L'ankylose, de même que la réduction du pied, sont parfaites, et l'enfant peut facilement, sans aucun soutien, sans appareil, se livrer à tous les exercices.

L'arthrodèse, telle qu'elle a été pratiquée dans les circonstances que nous venons de relater, n'est pas une opération neuve. Il y a quelques années déjà qu'elle a été décrite et exécutée par Albert, de Vienne (*).

Elle consiste dans la production artificielle de l'ankylose d'un article. Cette ankylose s'obtient par l'enlèvement de tranches minces des surfaces généralement *saines* (**) et la soudure osseuse consécutive. L'ankylose doit être obtenue, le membre étant placé dans une position favorable à son état fonctionnel. Ces caractères suffisent à distinguer l'arthrodèse de la résection articulaire, et à lui mériter une place à part parmi les opérations portant sur les surfaces articulaires.

Albert avait d'abord pratiqué cette opération dans des cas de paralysie infantile des extrémités inférieures, pour permettre la marche sans que le malade eût besoin de recourir aux appareils de soutien ; considération qui a son poids, surtout quand il s'agit de malades pauvres, qui ne peuvent se payer les frais d'appareils coûteux et souvent compliqués.

Peu à peu, les indications de l'opération se sont élargies, et

(*) Ed. Albert, *Beitr. zur operativ. Chirurgie.* Wien, 1878, I, p. 11. — *Id.*, II, pp. 88-98. — *Chirurg. Section der 54. Versamml. deutscher Naturforscher und Aerzte in Salzburg* (Centralb. chirurg. 1881, p. 766 : Arthrodesen). — *Wiener medicin. Presse*, 1888, n° 23, etc. (Cités d'après le *Real Encyclopedie der gesammten Heilkunde.* vol. XXI, p. 593.)

(**) Ch. Roersch, *Contribution a l'étude de l'arthrodèse* (Revue de chirurgie, n° 6). Contrairement à cette conception, Roersch désigne sous le nom d'arthrodèse toute opération articulaire ayant pour but de produire une ankylose osseuse, que celle-ci soit entreprise sur une articulation saine à laquelle l'activité musculaire ne peut plus fournir la fixité et la position indispensables au bon fonctionnement, ou sur une articulation malade dont la soudure est déterminée par une résection plus ou moins étendue.

actuellement, l'arthrodèse trouve son application rationnelle dans un certain nombre de cas bien déterminés, dont nous allons brièvement passer en revue les plus importants.

Il peut ne pas paraître indifférent d'ankyloser une articulation et de condamner ainsi tout au moins une partie de membre à l'inactivité et à ses suites inévitables.

Nous ne nous arrêterons pas à une objection formulée par Zinsmeister (*) et d'après laquelle il serait dangereux d'opérer de très jeunes sujets, de crainte d'entraver la croissance du membre par l'enlèvement du noyau épiphysaire, cet accident ne pouvant guère arriver dans une arthrodèse bien exécutée, où l'on se contente d'enlever de minces lamelles articulaires.

Mais nous devons cependant, d'accord avec la plupart des chirurgiens actuels, insister sur ce point : c'est que toutes les fois qu'on se décide à pratiquer une arthrodèse, il faut des indications spéciales bien nettes et bien précises.

L'arthrodèse ne constitue en somme qu'une intervention d'exception, et l'on ne saurait prétendre remplacer toujours par elle les autres opérations qui, dans un cas donné, peuvent fournir un résultat sinon meilleur, tout au moins aussi favorable.

Elle peut entrer en ligne de compte, tantôt comme opération complémentaire, tantôt (et c'est ici qu'elle trouve surtout son application justifiée) comme dernière ressource, là où d'autres moyens ont échoué ou doivent manifestement rester insuffisants.

Nous croyons inutile d'insister plus longuement sur ce point, et de donner en détail les indications qui peuvent se présenter dans chaque cas en particulier. Qu'il nous suffise de répéter que là où d'autres moyens peuvent amener un résultat satisfaisant, il faut rejeter l'arthrodèse comme une mutilation grave non justifiable.

Examinons maintenant les circonstances particulières dans lesquelles l'arthrodèse trouve son application rationnelle et justifiée.

(*) O. Zinsmeister (*Deuts. Zeitsch. f. Chirurgie*, 1887, XXVI, pp. 498 et suiv.) Cité d'après *Real Encyclop.*, etc.

1° Dans la paralysie infantile spinale ou essentielle. Ainsi que le dit Schüller (*), l'arthrodèse est entièrement indiquée dans les cas de paralysie irréparable. Elle est surtout nécessaire aux articulations du pied. Les appareils, quelque bien construits qu'ils puissent être, ne pourront jamais fixer d'une façon satisfaisante les articulations ballantes du pied ou du tarse, et l'arthrodèse donne ici des résultats incomparablement supérieurs à ceux fournis par les meilleurs appareils.

En dehors de quelques rares variétés de pied bot congénital, l'arthrodèse trouve surtout son véritable terrain d'application dans les diverses formes de pieds bots acquis et paralytiques. Certainement l'arthrodèse ne doit pas s'appliquer indistinctement à tous les cas de pieds bots paralytiques, et l'on en a peut-être abusé parfois. Comme nous l'avons déjà dit, il n'y a pas lieu de pratiquer cette opération, si on peut redresser le pied par les autres interventions et même par l'extirpation de l'astragale. Mais nous sommes d'avis, avec Kirmisson (**), que là où il existe un pied ballant, où tout est paralysé, il n'y a rien à couper, et l'arthrodèse y trouve son application.

Faite dans ces mêmes conditions au genou, l'arthrodèse y trouve également des résultats remarquables.

Ce n'est pas seulement aux extrémités inférieures que l'arthrodèse peut être utilement appliquée, mais encore dans les paralysies spinale ou myopathique des extrémités supérieures. Ainsi, quand le bras retombe inerte et est pendant, par suite de la paralysie des muscles de l'épaule ou du bras, et qu'au contraire les muscles de l'avant-bras fonctionnent encore, il est utile de fixer dans une position favorable les articulations de l'épaule ou du coude.

2° L'arthrodèse peut constituer une dernière ressource dans les divers cas d'articulations ballantes, provenant de causes nombreuses : par exemple, après certaines résections, après des

---

(*) Schüller, *Real Encyclopedie der Gesammten Heilkunde*. Vol. XXI, page 594.

(**) Kirmisson, *Bulletins et mémoires de la Société de chirurgie de Paris*. T. XVIII 1892, page 95.

arthrites, dans les anomalies de développement. Elle est surtout indiquée ici au genou et au pied (*). Quant à l'extrémité supérieure, les muscles fonctionnant encore, il serait peut-être préférable de se borner à obtenir par des interventions appropriées, qui peuvent être considérées comme des variétés de l'arthrodèse typique, une semi-ankylose. Celle-ci s'obtiendrait par la production d'une réunion fibreuse extensible ou par le raccourcissement et la suture de la capsule articulaire.

3° Durant ces dernières années, l'arthrodèse a souvent été exécutée dans des cas de luxation congénitale de la hanche, de même que dans les luxations myopathiques de l'épaule, ayant entraîné de l'atrophie par inactivité du deltoïde et des muscles de l'épaule.

Il est clair que l'opération ne peut se pratiquer que dans la luxation congénitale unilatérale de la hanche. S'il s'agit d'une luxation double, comme cela arrive dans la plupart des cas de luxation myopathique de l'épaule, il vaut mieux s'adresser à d'autres interventions, notamment à celles que nous venons de signaler tantôt : le raccourcissement de la capsule ou la production d'un tissu fibreux inter-articulaire.

Ainsi qu'il est facile de s'en convaincre par l'énumération des diverses circonstances dans lesquelles l'opération trouve son application justifiée, l'arthrodèse est une précieuse ressource, souvent le dernier et unique moyen mis entre les mains du chirurgien, pour triompher d'infirmités incurables ou tout au moins pour en atténuer largement les inconvénients.

A ce titre, elle mérite de fixer notre attention et de voir ses indications plus nettement délimitées encore par l'expérience ultérieure et la connaissance des résultats obtenus dans les cas où elle a trouvé son emploi judicieux.

(*) SCHWARTZ. *Arthrodèse du genou pour une articulation ballante.* (BULL. ET MÉM. DE LA SOC. DE CHIR. DE PARIS, vol. XVIII, 1892, p. 725)

SUR LA FORMALINE

PAR

MM. les Drs DE BUCK & VANDERLINDEN.

Depuis quelque temps, l'asepsie prévaut, et à bon droit, en chirurgie, sur l'antisepsie, dans une foule de cas traités antérieurement selon la méthode antiseptique. Nous n'avons pas l'intention de discuter ici la possibilité de la généralisation de son emploi, même quand il s'agit de plaies infectées.

Nous ne pouvons cependant actuellement nous passer d'antiseptique dans certaines circonstances, par exemple dans le nettoyage des mains, des objets ne résistant pas à l'action de la vapeur ou de l'ébullition, etc.

Tout le monde connait les inconvénients attachés à l'emploi des antiseptiques les plus en vogue : l'acide phénique et le sublimé. Sans vouloir insister plus spécialement sur la toxicité et la grande affinité pour les métaux des solutions mercuriques, signalons cependant les irritations eczémateuses que déterminent les solutions des deux antiseptiques. Ainsi il nous est arrivé bien souvent, après des opérations de quelque durée, d'observer une desquamation épidermique des mains, très abondante et très ennuyeuse.

Dans un travail soumis il y a quelque temps à la Société de médecine de Gand, nous avons fait une courte étude, au point de vue clinique et expérimental, d'un produit antiseptique relativement récent : nous voulons parler de la *formaline*.

Ainsi que nous l'avons dit dans ce travail, l'idéal serait de posséder un antiseptique stérilisant complètement et rapidement tous les objets avec lesquels il vient en contact, pourvu d'un

grand pouvoir de diffusibilité en même temps que d'une innocuité parfaite vis-à-vis des tissus, sans toxicité, n'attaquant pas les instruments, pouvant enfin s'acquérir à un prix modique.

Examinons donc brièvement si la formaline réalise plus ou moins parfaitement ces desiderata.

La formaline, telle qu'elle nous a été livrée par la *Chemische Fabrik auf Actien vormals E. Schering*, de Berlin, constitue une solution de formaldéhyde dans l'eau, à raison de 40 °/₀ en poids. Cette solution se présente sous forme d'un liquide incolore, à odeur pénétrante, et, à cette concentration, douée de propriétés tannantes.

Comme gaz très soluble dans l'eau, le formaldéhyde jouit d'une grande diffusibilité.

Le formaldéhyde et conséquemment la formaline possèdent des propriétés désinfectantes très énergiques signalées d'abord par Loew, puis par Büchner et Segall. Aronson démontra que, dans une solution de 1/20000, le bacille typhique est arrêté dans son développement.

Les expériences de Stahl démontrent que la formaline peut être considérée comme très voisine du sublimé au point de vue microbicide, voire même comme supérieure à celui-ci en présence d'un liquide albumineux. Sous forme de vapeurs mélangées à l'air en proportion de 2.5 °/₀, la formaline détruit tous les microbes, même dans leur forme résistante. Tous les objets sont stérilisés sans être détériorés après une pulvérisation d'une solution aqueuse de $^1/_2$ à 2 °/₀ de formaline. Celle-ci n'attaque dans les tissus que les agents pathogènes seuls, en respectant les corps organiques et inorganiques que ces germes ont envahis. La formaline pourrait être appelée une sorte de sublimé inoffensif.

D'autres auteurs, en grand nombre, confirment tous la haute valeur stérilisante et microbicide du formaldéhyde dont l'activité tiendrait surtout à sa parfaite solubilité, à sa diffusibilité et à la non-précipitation de l'albumine.

Nous nous proposons, au laboratoire d'hygiène de l'Université et sous la direction de M. le professeur Van Ermengem, d'insti-

tuer des expériences bactériologiques à ce sujet et nous espérons pouvoir en donner les résultats dans une prochaine séance (*).

Nous basant sur les travaux qui précèdent, nous nous sommes servis, depuis quelques mois, dans notre institut chirurgical de Gendbrugge, partout où il s'agissait de la méthode antiseptique, exclusivement de la formaline.

Le lavage des mains, le nettoyage de la région opératoire, des plaies, etc., se fait par la solution aqueuse à $^1/_2$ °/$_0$ en volume.

A ce degré de concentration, la formaline n'est pas caustique; elle ne présente pas d'odeur désagréable, elle n'attaque ni les instruments ni les tissus.

Les résultats ainsi obtenus par l'usage de la formaline dans une centaine de cas, nous ont paru assez satisfaisants. Sans vouloir déterminer la part que la propreté, l'asepsie, peut revendiquer dans ce résultat, nous pouvons affirmer que la solution aqueuse de formaline à $^1/_2$ °/$_0$, employée dans les mêmes conditions (l'eau qui sert à préparer les solutions de formaline a toujours été récemment stérilisée par l'ébullition, les instruments bouillis, etc.) constitue un liquide excellent à l'usage de la pratique chirurgicale.

Nous avons aussi tâché de déterminer expérimentalement la toxicité de la formaline par des injections intra-veineuses et hypodermiques faites sur des chiens et des lapins.

Sans vouloir entrer dans des détails en citant des chiffres nécessairement variables d'après les conditions dans lesquelles on opère, nous pouvons affirmer que son emploi ne doit aucunement être redouté et n'est pas susceptible de provoquer des accidents toxiques, même là où l'on pourrait se trouver en face de larges surfaces absorbantes.

(*) *Addition.* — Depuis la lecture de cette note, nous avons commencé nos expériences au laboratoire de bactériologie de l'Université de Gand. Elles sont loin d'être entièrement achevées.

Nous pouvons cependant affirmer dès maintenant que la valeur microbicide de la formaline ne correspond absolument pas à celle qui a été signalée par les auteurs que nous avons cités dans cette note. Ainsi des solutions à 5 °/$_0$, voire même à 10 °/$_0$ et plus, solutions évidemment non utilisables en chirurgie, ne donnent pas encore toutes les garanties qu'on demande, dans la pratique chirurgicale, d'un bon antiseptique. Ce travail sera publié prochainement.

Nous finissons en rapportant textuellement les conclusions que nous avons formulées dans notre premier travail :

1° La formaline en solution aqueuse à $^1/_2$ °/₀ répond bien à certains desiderata de la chirurgie moderne, comme liquide à la fois aseptique et antiseptique (*); il n'est pas improbable que cette concentration puisse encore être abaissée ;

2° A ce degré de concentration, la formaline ne peut exercer sur nos tissus qu'une action fort peu nocive;

3° Son absorption n'est pas à craindre, car sa toxicité est faible ;

4° Pour autant qu'elle est toxique, son action se porte surtout sur le système nerveux central et notamment sur la moelle.

Gand, octobre 1893.

(*) Voyez toutefois les réserves formulées plus haut à la suite de nos essais d'ordre bactériologique.

SUR L'ADDITION DES FONCTIONS HYPERELLIPTIQUES (*)

PAR

M. le Vte de SALVERT

Professeur à la Faculté Catholique des Sciences de Lille.

Dans une communication insérée dans le Compte Rendu de la dernière Session, nous avons soumis à la première Section un aperçu sommaire d'une Note présentée par nous à l'Académie des Sciences (Séance du 6 Février 1893), en indiquant, pour le cas de quatre variables seulement, les résultats formulés dans la dite Note pour le cas le plus général de $n + 1$ variables. Nous voudrions aujourd'hui exposer également à la Section, à l'aide du même mode de simplification, les résultats d'une seconde Note qui se rattache étroitement à la précédente, et qui concerne les formules d'addition des Fonctions Hyperelliptiques de première espèce les plus générales (*Comptes Rendus*, 13 Février 1893).

Pour cela, nous partirons de l'énoncé du Théorème d'Abel pour le susdit cas de quatre variables, formulé dans notre communication précitée à la Section (Séance du 11 Avril 1893, *Annales*, T. XVII, 1re Partie, pp. 70-79), énoncé que nous allons, pour plus de commodité, rapporter ici dans les termes suivants, nous réservant de le démontrer complètement dans une communication ultérieure :

(*) Communication faite aux séances de la première Section, du 26 octobre 1893, à Namur, et du 25 Janvier 1894, à Bruxelles.

« *Si l'on représente par* $f(\omega)$, $\mathcal{F}(\omega)$, *et* $F(\omega)$, *les trois poly-*
» *nômes à facteurs simples*

$$(1)\quad \begin{cases} f(\omega) = (\omega + a^2)(\omega + b^2)(\omega + c^2)(\omega + d^2), \\ \mathcal{F}(\omega) = (\omega + \lambda)\ (\omega + \mu)\ (\omega + \nu)\ (\omega + \theta), \end{cases}$$

$$(2)\quad F(\omega) = f(\omega)(\omega^3 + U\omega^2 + V\omega + W),$$

« *et si,* λ, μ, ν, θ *désignant un système de variables elliptiques,*
« X, Y, Z, T *sont les variables corrélatives définies par les équa-*
« *tions suivantes, analogues à celles relatives au Système Ellip-*
« *soïdal,*

$$(3)\quad X^2 = \frac{\mathcal{F}(a^2)}{-f'(-a^2)},\quad Y^2 = \frac{\mathcal{F}(b^2)}{-f'(-b^2)},\quad Z^2 = \frac{\mathcal{F}(c^2)}{-f'(-c^2)},\quad T^2 = \frac{\mathcal{F}(d^2)}{-f'(-d^2)},$$

« *le système hyperelliptique à quatre variables, dans l'écriture*
« *duquel nous faisons, pour abréger,* $\rho = \lambda, \mu, \nu, \theta$, *savoir*

$$(4)\quad \sum_\rho \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0,\qquad \sum_\rho \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0,\qquad \sum_\rho \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = 0,$$

« *outre l'intégrale transcendante évidente*

$$(5)\quad \sum_\rho \int \frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_1,\qquad \sum_\rho \int \frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_2,\qquad \sum_\rho \int \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}} = W_3,$$

« *admettra encore l'intégrale algébrique formée des trois équa-*
« *tions*

$$(6)\quad \begin{cases} L^2 + M^2 + N^2 + P^2 + Q^2 + R^2 \\ = (b^2 + c^2 + d^2)\alpha^2 + (c^2 + d^2 + a^2)\beta^2 + (d^2 + a^2 + b^2)\gamma^2 + (a^2 + b^2 + c^2)\delta^2 - U, \\ (c^2 + d^2)L^2 + (b^2 + d^2)M^2 + (b^2 + c^2)N^2 + (a^2 + d^2)P^2 + (a^2 + c^2)Q^2 + (a^2 + b^2)R^2 \\ = (b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)\alpha^2 + (c^2d^2 + c^2a^2 + d^2a^2)\beta^2 \\ + (d^2a^2 + d^2b^2 + a^2b^2)\gamma^2 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\delta^2 - V, \\ c^2d^2L^2 + b^2d^2M^2 + b^2c^2N^2 + a^2d^2P^2 + a^2c^2Q^2 + a^2b^2R^2 \\ = b^2c^2d^2.\alpha^2 + c^2d^2a^2.\beta^2 + d^2a^2b^2.\gamma^2 + a^2b^2c^2.\delta^2 - W, \end{cases}$$

« *dans lesquelles* L, M, N, P, Q, R *tenant lieu, pour abréger,*
« *des six différences*

$$(7)\quad \begin{cases} L = \beta X - \alpha Y, & M = \gamma X - \alpha Z, & N = \delta X - \alpha T, \\ P = \gamma Y - \beta Z, & Q = \delta Y - \beta T, & R = \delta Z - \gamma T, \end{cases}$$

« $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *désignent quatre constantes liées par la seule relation*

$$(8)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1,$$

« *de manière que trois d'entre elles demeurent complètement*
« *arbitraires.* »

Admettant ainsi ce point de départ, et déduisant alors des définitions (7) les trois relations linéaires (*)

$$(9)\qquad \alpha P - \beta M + \gamma L = 0, \qquad \alpha Q - \beta N + \delta L = 0, \qquad \alpha R - \gamma N + \delta M = 0,$$

l'on remarquera tout d'abord que ces trois équations, étant jointes aux trois précédentes (6), assignent dès lors aux six différences L, M, N, P, Q, R des valeurs constantes déterminées.

Partant donc de là, considérons deux systèmes de valeurs des inconnues $\lambda, \mu, \nu, \theta$ que nous spécifierons, ainsi que toutes les différentes fonctions qui s'y rapportent, par les indices 1 et 2, et astreints à la seule condition de vérifier l'un et l'autre, pour les mêmes valeurs des constantes d'intégration, les deux formes d'intégrales, soit transcendante, soit algébrique, (5) et (6), c'est-à-dire tels par hypothèse que l'on ait à la fois : quant à la première, en y prenant toutes les quadratures à partir d'une

---

(*) Le nombre des combinaisons des quatre coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ trois à trois étant de $\frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$, il devra donc *a priori* exister une quatrième relation de même forme entre les six mêmes quantités L, M, N, P, Q, R, laquelle est, en effet,

$$\beta R - \gamma Q + \delta P = 0.$$

Mais cette dernière n'est pas distincte algébriquement des précédentes (9), car, si on les représente, pour abréger, respectivement dans l'ordre où nous les avons écrites, par $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{B} = 0$, $\mathcal{C} = 0$, $\mathcal{D} = 0$, il est aisé de vérifier que l'on aura *identiquement* :

$$\delta\mathcal{A} - \gamma\mathcal{B} + \beta\mathcal{C} - \alpha\mathcal{D} = 0.$$

même limite inférieure ρ_0 supposée fixe, que nous spécifierons un peu plus loin,

$$(10)\quad\begin{cases}\sum_{\rho_1}\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_1, & \sum_{\rho_1}\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_2, & \sum_{\rho_1}\int_{\rho_0}^{\rho_1}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_3,\\ \sum_{\rho_2}\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_1, & \sum_{\rho_2}\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_2, & \sum_{\rho_2}\int_{\rho_0}^{\rho_2}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}=W_3;\end{cases}$$

puis, quant à la forme algébrique (6), en y introduisant la relation (8) admise pour la définition des arbitraires α, β, γ, δ, relativement au premier des deux systèmes de valeurs, par exemple, les trois équations

$$(11)\quad\begin{cases}L_1^2+M_1^2+N_1^2+P_1^2+Q_1^2+R_1^2=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+D\delta^2,\\ (c^2+d^2)L_1^2+(b^2+d^2)M_1^2+(b^2+c^2)N_1^2+(a^2+d^2)P_1^2+(a^2+c^2)Q_1^2+(a^2+b^2)R_1^2\\ \qquad =A'\alpha^2+B'\beta^2+C'\gamma^2+D'\delta^2,\\ c^2d^2L_1^2+b^2d^2M_1^2+b^2c^2N_1^2+a^2d^2P_1^2+a^2c^2Q_1^2+a^2b^2R_1^2\\ \qquad =A''\alpha^2+B''\beta^2+C''\gamma^2+D''\delta^2,\end{cases}$$

dans lesquelles nous faisons, en vue d'abréger l'écriture d'équations ultérieures,

$$(12)\quad\begin{cases}A=b^2+c^2+d^2-U, & B=c^2+d^2+a^2-U,\\ C=d^2+a^2+b^2-U, & D=a^2+b^2+c^2-U,\\ A'=b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2-V, & B'=c^2d^2+c^2a^2+d^2a^2-V,\\ C'=d^2a^2+d^2b^2+a^2b^2-V, & D'=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-V,\\ A''=b^2c^2d^2-W,\quad B''=c^2d^2a^2-W, & C''=d^2a^2b^2-W,\quad D''=a^2b^2c^2-W;\end{cases}$$

et de même, pour le second système de valeurs de λ, μ, ν, θ, un autre système de trois équations semblables qui ne différera de celui-ci que par le changement de l'indice 1 en 2.

Ces hypothèses étant admises, l'élimination des quatre arbi-

traires α, β, γ, δ entre ces six équations qui sont homogènes par rapport à elles, donnera naissance à trois autres équations qui seront fournies presque immédiatement par la propriété des fonctions L, M, ..., R que nous avons établie en commençant, car les six conditions qui en résultent entre les deux systèmes de valeurs considérés, savoir

$$L_1 = L_2, \quad M_1 = M_2, \quad N_1 = N_2, \quad P_1 = P_2, \quad Q_1 = Q_2, \quad R_1 = R_2,$$

c'est-à-dire, en vertu des définitions (7), les suivantes

$$\beta X_1 - \alpha Y_1 = \beta X_2 - \alpha Y_2, \qquad \gamma X_1 - \alpha Z_1 = \gamma X_2 - \alpha Z_2, \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \delta Z_1 - \gamma T_1 = \delta Z_2 - \gamma T_2,$$

ou, ce qui est la même chose, celles-ci

$$\beta(X_1 - X_2) = \alpha(Y_1 - Y_2), \qquad \gamma(X_1 - X_2) = \alpha(Z_1 - Z_2), \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \delta(Z_1 - Z_2) = \gamma(T_1 - T_2),$$

lesquelles se réduisent, comme on voit, aux trois seules égalités

$$(13) \qquad \frac{\alpha}{X_1 - X_2} = \frac{\beta}{Y_1 - Y_2} = \frac{\gamma}{Z_1 - Z_2} = \frac{\delta}{T_1 - T_2},$$

pourront évidemment remplacer, en vue de l'élimination proposée, le second système de trois équations analogue à (11) que nous n'avons pas écrit. Et dès lors, le résultat de cette élimination s'obtiendra manifestement, eu égard à l'homogénéité de ce système (11) par rapport à α, β, γ, δ, en y remettant simplement à la place de ces constantes les quatre quantités proportionnelles (13), opération qui conduira, toutes réductions faites, aux trois équations suivantes

$$(14)\begin{cases} \mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{P}^2 + \mathfrak{Q}^2 + \mathfrak{R}^2 = A\mathfrak{X}^2 + B\mathfrak{Y}^2 + C\mathfrak{Z}^2 + D\mathfrak{T}^2, \\ (c^2+d^2)\mathfrak{L}^2 + (b^2+d^2)\mathfrak{M}^2 + (b^2+c^2)\mathfrak{N}^2 + (a^2+d^2)\mathfrak{P}^2 + (a^2+c^2)\mathfrak{Q}^2 + (a^2+b^2)\mathfrak{R}^2 \\ \qquad = A'\mathfrak{X}^2 + B'\mathfrak{Y}^2 + C'\mathfrak{Z}^2 + D'\mathfrak{T}^2, \\ c^2d^2\mathfrak{L}^2 + b^2d^2\mathfrak{M}^2 + b^2c^2\mathfrak{N}^2 + a^2d^2\mathfrak{P}^2 + a^2c^2\mathfrak{Q}^2 + a^2b^2\mathfrak{R}^2 \\ \qquad = A''\mathfrak{X}^2 + B''\mathfrak{Y}^2 + C''\mathfrak{Z}^2 + D''\mathfrak{T}^2, \end{cases}$$

dans lesquelles nous faisons de nouveau, pour abréger les écritures :

$$
(15)\quad \left\{ \begin{array}{llll}
\mathfrak{L} = X_1Y_2 - Y_1X_2, & \mathfrak{M} = X_1Z_2 - Z_1X_2, & \mathfrak{N} = X_1T_2 - T_1X_2, & \\
\mathfrak{P} = Y_1Z_2 - Z_1Y_2, & \mathfrak{Q} = Y_1T_2 - T_1Y_2, & \mathfrak{R} = Z_1T_2 - T_1Z_2, & \\
\mathfrak{X} = X_1 - X_2, & \mathfrak{Y} = Y_1 - Y_2, & \mathfrak{Z} = Z_1 - Z_2, & \mathfrak{T} = T_1 - T_2.
\end{array} \right.
$$

Ces résultats préliminaires étant acquis, proposons-nous à présent l'étude des trois fonctions hyperelliptiques de première espèce

$$
(16)\qquad \varphi(u, v, w) = \varphi, \qquad \psi(u, v, w) = \psi, \qquad \varpi(u, v, w) = \varpi,
$$

définies par le système des trois équations transcendantes, dans lesquelles le chemin d'intégration est supposé le même pour chaque variable φ, ψ, ϖ séparément,

$$
(17)\quad \left\{ \begin{array}{l}
\displaystyle\int_{\rho_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} + \int_{\rho_0}^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{F(\psi)}} + \int_{\rho_0}^{\varpi} \frac{d\varpi}{\sqrt{F(\varpi)}} = u, \\
\displaystyle\int_{\rho_0}^{\varphi} \frac{\varphi\, d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} + \int_{\rho_0}^{\psi} \frac{\psi\, d\psi}{\sqrt{F(\psi)}} + \int_{\rho_0}^{\varpi} \frac{\varpi\, d\varpi}{\sqrt{F(\varpi)}} = v, \\
\displaystyle\int_{\rho_0}^{\varphi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} + \int_{\rho_0}^{\psi} \frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{F(\psi)}} + \int_{\rho_0}^{\varpi} \frac{\varpi^2 d\varpi}{\sqrt{F(\varpi)}} = w,
\end{array} \right.
$$

et qui sont, pour la seconde classe, celles dont la considération a été introduite en Analyse par l'illustre Jacobi dans le célèbre Mémoire intitulé *Considerationes generales de Transcendentibus Abelianis* (JOURNAL DE CRELLE, Tome IX, pp. 394-406).

Dans cette pensée, nous remarquerons tout d'abord que ces équations que nous venons d'écrire ne cesseront pas d'offrir un sens parfaitement déterminé, si l'on y prend pour la constante ρ_0, ainsi que nous le supposerons expressément désormais, l'une quelconque des racines de l'équation $F(\rho) = 0$, car bien que l'élément de chacune des intégrales devienne infini pour cette

limite, l'ordre *d'infinité* de cette racine étant toujours $\frac{1}{2}$, chaque intégrale en question demeurera donc finie et déterminée (*).

Cette première hypothèse étant admise, et laissant arbitraire dans notre définition relative à ce système (17) la détermination initiale qu'il faudra prendre pour chacun des radicaux qui y figurent, sous la seule condition que cette détermination initiale soit la même à la fois dans les trois intégrales qui figurent dans une même équation, il est aisé de reconnaître que les trois fonctions φ, ψ, ϖ ainsi définies par ces équations (17) seront alors des fonctions paires relativement aux trois variables indépendantes u, v, w *considérées simultanément*.

En effet, convenant de désigner pour un instant par ω l'une quelconque des trois variables φ, ψ, ϖ, et remarquant que chacune des intégrales qui figurent dans ces équations (17) rentre alors dans le type $\int_{\rho_0}^{\omega} \frac{\omega^i d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}$ pour les valeurs de l'exposant $i = 0, 1, 2$, représentons, pour plus de clarté, par le même symbole écrit entre parenthèses la valeur qu'acquiert chaque intégrale envisagée lorsque la variable d'intégration ω passe, par un chemin déterminé, entièrement arbitraire pour chacune de ces variables ω séparément, de la valeur initiale ρ_0 entendue comme nous venons de le dire, à une valeur déterminée, arbitraire elle aussi pour chaque variable ω, que nous désignerons encore par ω; et dans ces conditions, examinons, à l'aide des considérations habituelles dans ce genre de questions, quelles valeurs en résulteront d'après les équations proposées (17) pour chacune des variables u, v, w.

En se rappelant alors ces deux faits très connus, à savoir, d'abord que chaque intégrale du type précité, étant prise sur le contour d'un cercle de rayon infiniment petit, décrit autour du point ρ_0 comme centre, sera elle-même une quantité infiniment petite, et en second lieu que chaque révolution semblable de la variable ω autour de la racine ou point critique ρ_0 aura pour effet de changer la détermination du radical $\sqrt{F(\omega)}$, comme l'on pourra toujours

(*) Voir, si l'on veut, JORDAN, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Tome II, § 76, p. 85.

commencer par faire décrire, au départ, à chaque variable ω un même nombre n de ces révolutions dans le même sens autour du point initial ρ_0, puis après cela seulement le chemin convenu $(\rho_0\omega)$, arbitrairement choisi pour chaque variable ω séparément, l'on voit ainsi, sans peine, que les valeurs finales qui en résulteront d'après les équations (17) pour les variables u, v, w, seront

$$\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=u,\quad \left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{\omega d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=v,\quad \left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{\omega^2 d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=w,$$

lorsque le nombre n des révolutions sera pair, et

$$-\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=u,\quad -\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{\omega d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=v,\quad -\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{\omega^2 d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=w,$$

lorsque ce même nombre sera impair.

En effet, dans cette seconde hypothèse, la détermination du radical correspondant à l'une quelconque des variables ω en particulier sera manifestement, en chaque point du chemin $(\rho_0\omega)$ décrit par cette variable, la détermination contraire de celle qui appartenait à ce même radical au même point dans l'hypothèse précédente, du moment qu'il en sera ainsi à l'origine du chemin d'une part, et que d'autre part la succession ou l'échange de ces déterminations entre elles est fixé, sans aucun arbitraire, par le nombre des révolutions de même sens autour des points critiques auxquelles peut se ramener le chemin envisagé, c'est-à-dire en fait par ce chemin déterminé lui-même. D'où il suit que l'élément de chacune des intégrales aura, dans la seconde hypothèse, en chaque point du chemin considéré $(\rho_0\omega)$, une valeur exactement égale et de signe contraire à celle qu'il avait dans la première ; et comme nous supposons que nous avons agi, au départ, exactement de la même façon à l'égard des trois variables ω à la fois, et qu'en conséquence, après l'opération précitée, la détermination initiale des radicaux se sera retrouvée encore la même pour les trois intégrales qui figurent dans une même équation (17), ainsi que l'exige notre définition de ce système, il est donc clair à présent que les seconds membres de chacune de ces équa-

tions (17), c'est-à-dire les quantités u, v, w, recevront alors eux-mêmes dans la seconde hypothèse une valeur égale et de signe contraire à celle qu'ils avaient reçue dans la première.

Cela revient à dire que, sans avoir à se préoccuper de la dépendance qui devra exister nécessairement, dans la question, entre les chemins décrits respectivement par les trois variables ω ou φ, ψ, ϖ considérées à la fois, et que nous ne connaissons pas *a priori*, les équations de définition (17) donneront, pour le chemin déterminé, quel qu'il soit, supposé décrit par chaque variable ω séparément, indifféremment les deux valeurs

$$\pm\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\infty}\frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=u,\quad \pm\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\omega}\frac{\omega d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=v,\quad \pm\left(\sum_{\omega}\int_{\rho_0}^{\infty}\frac{\omega^2 d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\right)=w,$$

ou, en d'autres termes, que ces équations de définition pourront s'écrire aussi bien, avec les mêmes conditions, et *pour les mêmes valeurs* de φ, ψ, ϖ d'une part, et de u, v, w de l'autre,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{\rho_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}}+\int_{\rho_0}^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{F(\psi)}}+\int_{\rho_0}^{\varpi}\frac{d\varpi}{\sqrt{F(\varpi)}}=-u,\\
&\int_{\rho_0}^{\varphi}\frac{\varphi d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}}+\int_{\rho_0}^{\psi}\frac{\psi d\psi}{\sqrt{F(\psi)}}+\int_{\rho_0}^{\varpi}\frac{\varpi d\varpi}{\sqrt{F(\varpi)}}=-v,\\
&\int_{\rho_0}^{\varphi}\frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}}+\int_{\rho_0}^{\psi}\frac{\psi^2 d\psi}{\sqrt{F(\psi)}}+\int_{\rho_0}^{\varpi}\frac{\varpi^2 d\varpi}{\sqrt{F(\varpi)}}=-w,
\end{aligned}\right.$$

et par conséquent que les trois fonctions φ, ψ, ϖ satisferont, en vertu de leur définition même, aux conditions annoncées : (*)

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varphi(-u,-v,-w)=\varphi(u,v,w),\\
&\psi(-u,-v,-w)=\psi(u,v,w),\\
&\varpi(-u,-v,-w)=\varpi(u,v,w).
\end{aligned}\right.$$

(*) Il est aisé de vérifier *a posteriori* l'existence du fait que nous démontrons sur les

Cela posé, si l'on convient de faire simultanément, toujours avec la condition que les chemins d'intégration soient les mêmes,

---

deux cas particuliers analogues les plus simples, savoir ceux qui correspondent aux deux équations

$$u = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad \text{et} \qquad U = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}},$$

car si l'on y fait

$$(\alpha) \qquad u_0 = \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad \text{et} \qquad U_0 = \int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}},$$

l'on trouvera, en ajoutant membre à membre, respectivement pour chacun des deux cas,

$$u + u_0 = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \qquad \text{et} \qquad U + U_0 = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}},$$

c'est-à-dire, pour la fonction ρ envisagée dans chacun d'eux, la valeur

$$(\beta) \qquad \rho = \sin(u + u_0), \qquad \text{ou} \qquad \rho = \operatorname{sn}(U + U_0),$$

fonction qui, lorsqu'on laissera arbitraires ρ_0 et par conséquent, d'après les définitions (α), u_0 ou U_0, ne sera donc, en général, relativement à u ou à U, ni paire ni impaire.

Or, si l'on convient, au contraire, de prendre pour ρ_0 l'une quelconque des racines du radical, savoir $\rho = \pm 1$ ou $\rho = \pm \frac{1}{k}$, auquel cas l'on aura alors

$$u_0 = \int_0^{\pm 1} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \pm \int_0^{1} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \pm \frac{\pi}{2},$$

et de même

$$U_0 = \int_0^{\pm 1} \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}} = \pm K,$$

ou bien

$$U_0 = \int_0^{\pm \frac{1}{k}} \frac{d\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2\rho^2)}} = \pm (K + iK'),$$

les formules classiques montrent que la valeur (β) de la fonction ρ ci-dessus se changera alors, selon le cas, dans les suivantes

$$\rho = \sin\left(u \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos u, \qquad \rho = \operatorname{sn}(U \pm K) = \pm \frac{\operatorname{cn} U}{\operatorname{dn} U},$$

$$\rho = \operatorname{sn}[U \pm (K + iK')] = \pm \frac{1}{k} \frac{\operatorname{dn} U}{\operatorname{cn} U},$$

qui sont bien des fonctions paires de u ou de U, ainsi que l'indiquent les équations (19) pour des fonctions analogues de plusieurs variables.

pour chaque variable séparément, dans les trois équations de chacun des deux groupes que nous allons écrire à la suite l'un de l'autre,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=u_1,\\
&\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=v_1,\\
&\int_{\rho_0}^{\lambda_1}\frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_1}\frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\int_{\rho_0}^{\nu_1}\frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=w_1,\\
&\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=u_2,\\
&\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=v_2,\\
&\int_{\rho_0}^{\lambda_2}\frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\rho_0}^{\mu_2}\frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}+\int_{\rho_0}^{\nu_2}\frac{\nu^2 d\nu}{\sqrt{F(\nu)}}=w_2,
\end{aligned}\right.$$

d'une part, les équations transcendantes (10), si l'on y fait passer la dernière intégrale de chacune dans l'autre membre, assignant alors à ces six quantités u, v, w les valeurs

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}
&u_1=W_1-\int_{\rho_0}^{\theta_1}\frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}},\quad v_1=W_2-\int_{\rho_0}^{\theta_1}\frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}},\quad w_1=W_3-\int_{\rho_0}^{\theta_1}\frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}},\\
&u_2=W_1-\int_{\rho_0}^{\theta_2}\frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}},\quad v_2=W_2-\int_{\rho_0}^{\theta_2}\frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}},\quad w_2=W_3-\int_{\rho_0}^{\theta_2}\frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}},
\end{aligned}\right.$$

un théorème connu d'Arithmétique (*) montrera par conséquent, en raison des six périodes de chacun de ces trois types d'intégrales, que même en supposant données à volonté les cinq quantités W_1, W_2, W_3, θ_1, et θ_2, l'on pourra toujours disposer séparément des chemins suivis par la variable d'intégration pour passer de la valeur initiale ρ_0, soit à la valeur finale θ_1, soit à la valeur finale θ_2, de manière que chacun des six arguments u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 reçoive individuellement, dans les équations que nous venons d'écrire, une valeur absolument quelconque (**).

(*) Voir, si l'on veut, LAURENT, *Traité d'Analyse*, T. IV, Chap. VIII, p. 218, *en bas*; ou encore, pour un cas particulier plus simple, le raisonnement pouvant être étendu sans difficulté à un nombre plus grand de quantités, le célèbre Mémoire de Jacobi, intitulé : *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, etc.* (JOURNAL DE CRELLE, T. XIII, p. 55), au § 3 (pp. 58-61) de ce Mémoire.

(**) En effet, si nous convenons cette fois d'écrire entre parenthèses les intégrales que nous supposerons expressément rectilignes (sauf à éviter par un demi-cercle de rayon infiniment petit les points critiques qui pourraient être exactement situés sur la droite menée d'une limite à l'autre), et si nous représentons en outre par le symbole $A_j^{(i)}$ l'une quelconque des six périodes du type de quadrature $\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho^i d\rho}{\sqrt{F(\rho)}}$, l'expression la plus générale de l'une quelconque des intégrales qui figurent dans ces équations (21) sera

$$(\alpha) \qquad \int_{\rho_0}^{\theta} \frac{\theta^i d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} = \sum_{j=1}^{j=6} M_j A_j^{(i)} + \left(\int_{\rho_0}^{\theta} \frac{\theta^i d\theta}{\sqrt{F(\theta)}}\right),$$

M_j désignant un entier quelconque, positif ou négatif, et θ représentant indifféremment soit θ_1, soit θ_2. Si alors nous convenons pareillement de désigner en même temps par u, v, w les valeurs données, soit u_1, v_1, w_1, soit u_2, v_2, w_2, et que nous représentions dans cette hypothèse par le symbole $\mathcal{A}^{(i)}$ les trois quantités entièrement déterminées

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathcal{A}^{(0)} = u - W_1 + \left(\int_{\rho_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}}\right), \\ \mathcal{A}^{(1)} = v - W_2 + \left(\int_{\rho_0}^{\theta} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}}\right), \\ \mathcal{A}^{(2)} = w - W_3 + \left(\int_{\rho_0}^{\theta} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}}\right), \end{cases}$$

D'autre part, ajoutons séparément les deux équations écrites l'une au-dessous de l'autre dans le même système (21), en faisant passer tous les termes de chacune d'un membre dans l'autre, opération qui nous donnera les suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_{\rho_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} - 2W_1 = -(u_1 + u_2),\\
&\int_{\rho_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\theta_2} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} - 2W_2 = -(v_1 + v_2),\\
&\int_{\rho_0}^{\theta_1} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\theta_2} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} - 2W_3 = -(w_1 + w_2);
\end{aligned}\right.$$

---

les trois équations, soit de la première, soit de la seconde ligne du groupe (21), qu'il s'agit de vérifier, deviendront, en y introduisant ces expressions (α) et (6), et faisant passer, pour chacune, tous les termes dans le premier membre,

$$(\gamma) \qquad \sum_{j=1}^{j=6} M_j A_j^{(0)} + \mathcal{A}^{(0)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{j=6} M_j A_j^{(1)} + \mathcal{A}^{(1)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{j=6} M_j A_j^{(2)} + \mathcal{A}^{(2)} = 0,$$

ou, ce qui est la même chose sous forme explicite, en les multipliant chacune par un même nombre entier indéterminé m_7, et faisant en même temps $m_7 M_j = m_j$,

$$(\delta) \qquad \left\{\begin{aligned}
&m_1 A_1^{(0)} + m_2 A_2^{(0)} + \cdots\cdots + m_6 A_6^{(0)} + m_7 \mathcal{A}^{(0)} = 0,\\
&m_1 A_1^{(1)} + m_2 A_2^{(1)} + \cdots\cdots + m_6 A_6^{(1)} + m_7 \mathcal{A}^{(1)} = 0,\\
&m_1 A_1^{(2)} + m_2 A_2^{(2)} + \cdots\cdots + m_6 A_6^{(2)} + m_7 \mathcal{A}^{(2)} = 0,
\end{aligned}\right.$$

équations qui représentent en réalité *six* autres de même forme entre quantités exclusivement réelles, attendu que chacune des quantités $A_j^{(i)}$, $\mathcal{A}^{(i)}$ doit pour la plus grande généralité, être considérée comme imaginaire. Or, dans ces conditions, le théorème rappelé ci-dessus établit qu'il sera toujours possible de trouver *sept* nombre entiers $m_1, m_2, \ldots m_7$, positifs ou négatifs, tels que le premier membre de chacune de ces trois équations (δ) soit une quantité imaginaire de module moindre que ε, ε étant une quantité numérique positive aussi petite que l'on voudra (LAURENT ou JACOBI, *loc. cit.*) : auquel cas le premier membre de chacune des équations précédentes (γ) aura lui-même un module moindre que la valeur absolue de $\frac{\varepsilon}{m_7}$, ce qui revient à dire que les trois équations envisagées (21) seront alors vérifiées avec telle approximation que l'on voudra, pour des valeurs arbitrairement données de u, v, w.

Cette constatation était indispensable, en raison de ce que les deux quantités θ_1 et θ_2

puis, introduisant une nouvelle indéterminée τ, supposons que nous ayons pris pour les arbitraires W_1, W_2, W_3 des expressions de la forme

$$
(22)\quad \begin{cases} W_1 = -\frac{1}{2}\int_{\rho_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{F(\tau)}}, \qquad W_2 = -\frac{1}{2}\int_{\rho_0}^{\tau} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{F(\tau)}}, \\ W_3 = -\frac{1}{2}\int_{\rho_0}^{\tau} \frac{\tau^2 d\tau}{\sqrt{F(\tau)}}, \end{cases}
$$

le chemin d'intégration étant encore le même dans ces trois quadratures; les équations que nous venons de former devenant alors, avec ces dernières valeurs,

$$
(23)\quad \begin{cases} \int_{\rho_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{F(\tau)}} = -(u_1 + u_2), \\ \int_{\rho_0}^{\theta_1} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\theta_2} \frac{\theta d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\tau} \frac{\tau d\tau}{\sqrt{F(\tau)}} = -(v_1 + v_2), \\ \int_{\rho_0}^{\theta_1} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\theta_2} \frac{\theta^2 d\theta}{\sqrt{F(\theta)}} + \int_{\rho_0}^{\tau} \frac{\tau^2 d\tau}{\sqrt{F(\tau)}} = -(w_1 + w_2), \end{cases}
$$

seront, comme on le voit, de même que les précédentes (20), exactement de la forme de celles (17) ou (18) qui définissent indifféremment nos trois fonctions hyperellitiques φ, ψ, ϖ, et si l'on a égard à la propriété (19) de ces fonctions, ainsi qu'à la parfaite symétrie des dites équations (17) ou (18) par rapport aux

---

devant être définies un peu plus loin comme des fonctions déterminées des six arguments u, v, w, les six égalités en question (21) sembleront alors constituer pareil nombre d'équations entre ces six arguments et les constantes données W_1, W_2, W_3, en sorte que, sans la certitude qui vient d'être acquise, l'on devrait douter *a priori* que ces arguments demeurent tous arbitraires dans les résultats de notre théorie, lesquels n'offriraient plus dans ce cas aucune espèce d'importance ni d'intérêt.

trois symboles φ, ψ, ϖ, on voit alors que les deux systèmes en question (20) et (23) établiront, entre les limites supérieures des intégrales et les seconds membres de ces mêmes équations, une certaine corrélation qui pourra être écrite de six manières différentes, correspondant aux six permutations des trois symboles φ, ψ, ϖ, et parmi lesquelles nous allons noter ici seulement les trois suivantes qui correspondent à un mode de permutation circulaire de ces trois symboles, savoir :

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 = \varphi(u_1, v_1, w_1), & \mu_1 = \psi(u_1, v_1, w_1), & \nu_1 = \varpi(u_1, v_1, w_1), \\ \lambda_2 = \varphi(u_2, v_2, w_2), & \mu_2 = \psi(u_2, v_2, w_2), & \nu_2 = \varpi(u_2, v_2, w_2), \end{array}\right. \\ \qquad\left\{\begin{array}{l} \theta_1 = \varphi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2), \\ \theta_2 = \psi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2), \\ \tau = \varpi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2); \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 = \psi(u_1, v_1, w_1), & \mu_1 = \varpi(u_1, v_1, w_1), & \nu_1 = \varphi(u_1, v_1, w_1), \\ \lambda_2 = \psi(u_2, v_2, w_2), & \mu_2 = \varpi(u_2, v_2, w_2), & \nu_2 = \varphi(u_2, v_2, w_2), \end{array}\right. \\ \qquad\left\{\begin{array}{l} \theta_1 = \psi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2), \\ \theta_2 = \varpi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2), \\ \tau = \varphi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2); \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1 = \varpi(u_1, v_1, w_1), & \mu_1 = \varphi(u_1, v_1, w_1), & \nu_1 = \psi(u_1, v_1, w_1), \\ \lambda_2 = \varpi(u_2, v_2, w_2), & \mu_2 = \varphi(u_2, v_2, w_2), & \nu_2 = \psi(u_2, v_2, w_2), \end{array}\right. \\ \qquad\left\{\begin{array}{l} \theta_1 = \varpi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2), \\ \theta_2 = \varphi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2), \\ \tau = \psi(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2,\ w_1 + w_2). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Mais il faut bien observer que les mêmes quantités λ, μ, ν, θ recevraient nécessairement des valeurs différentes en général dans chacun de ces trois systèmes, si l'on y prenait à la fois dans tous les trois les mêmes valeurs pour chacun des six arguments $u_1, v_1, \ldots\ldots, w_2$; ou, ce qui revient au même, qu'inversement, aux mêmes valeurs des λ, μ, ν, θ, chacun de ces systèmes ferait

correspondre en général une série différente de valeurs pour les six arguments en question, chacune de ces trois séries pouvant d'ailleurs être considérée, à tour de rôle, comme entièrement arbitraire, en vertu du raisonnement présenté ci-dessus à l'occasion des équations (21).

Quel que soit celui que l'on adopte de ces trois modes d'interprétation des équations (20) et (23), si l'on substitue les expressions qu'il fournit pour les λ, μ, ν, θ dans l'une quelconque des trois équations (14), il est clair que l'équation ainsi obtenue sera, à chaque fois, une certaine combinaison des formules d'addition des fonctions φ, ψ, ϖ, car elle sera alors une relation algébrique entre les trois mêmes fonctions relatives aux deux séries d'arguments simples entièrement arbitraires, u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2, et deux des mêmes fonctions relatives aux arguments doubles $u_1 + u_2$, $v_1 + v_2$, $w_1 + w_2$.

Or, si l'on supposait connu le système complet des formules d'addition en question, lors même qu'elles contiendraient chacune, ainsi qu'il semble le plus naturel, à la fois les trois fonctions φ, ψ, ϖ relatives aux arguments doubles qui représentent les inconnues de ces formules, on pourrait évidemment toujours, en éliminant successivement à tour de rôle chacune de ces inconnues, remplacer le même système par un autre équivalent dans lequel chacune des équations ne contiendrait plus que deux des inconnues en question, c'est-à-dire deux des fonctions hyperelliptiques relatives aux arguments doubles seulement.

Partant de là, et se basant sur cette remarque très simple que la forme de chacune de ces dernières équations sera évidemment indépendante des dénominations ou des symboles admis pour chacune des séries d'arguments qui auront servi à la mettre en lumière, les trois modes ci-dessus d'interprétation des équations (20) et (23), contenant chacun deux des trois mêmes fonctions φ, ψ, ϖ qui sont différentes quand on passe de l'un de ces systèmes au système suivant, permettront dès lors, en les employant à tour de rôle, chacun pour une double série différente d'arguments simples entièrement arbitraires, de découvrir la forme de chacune des équations que nous venons de

spécifier à l'instant, et qui, formant ensemble un système équivalent à celui des formules d'addition demandées, pourront être prises en conséquence pour ces formules d'addition elles-mêmes.

En effet, parmi ces trois équations, celle caractérisée par l'absence de la fonction ϖ relative aux arguments doubles, sera obtenue, à l'aide d'une première double série d'arguments simples u, v, w, par la substitution des valeurs précédentes (I) dans l'une des équations, que l'on pourra choisir à volonté, du système (14), du moment que ce système ayant été formé par l'élimination des constantes arbitraires entre les deux systèmes tels que (11), la quantité τ dont la considération a été introduite exclusivement par les valeurs (22) des constantes d'intégration, ne saurait évidemment intervenir d'aucune façon, ni explicitement, ni implicitement, dans aucune desdites équations (14).

Admettons donc que nous ayons choisi la première de ces équations (14).

Semblablement, le système (II) faisant correspondre, ainsi que nous l'avons remarqué, aux mêmes valeurs des λ, μ, ν, θ déjà envisagées tout à l'heure, deux nouvelles séries d'arguments simples u, v, w que nous pourrons sans inconvénient, l'observation en étant faite, représenter encore par les mêmes symboles, pour connaître la forme d'une seconde des équations cherchées, par exemple celle caractérisée par l'absence de la fonction φ relative aux arguments doubles, il suffira évidemment de substituer cette fois, à la place des λ, μ, ν, θ, les dites expressions (II) prises pour les nouveaux arguments, dans l'une des équations du système (14), que l'on pourra choisir encore à volonté parmi les deux dernières, mais en excluant la première, attendu que l'ensemble des formules d'addition cherchées doit évidemment, *a priori*, renfermer tous les paramètres du polynome donné F (ω) (2) qui intervient dans la définition (17) des fonctions proposées, et, par conséquent, en particulier, les trois coefficients U, V, W, dont un seul figure dans chaque équation (14); or, si l'on prenait une seconde fois la première équation du système (14) pour ce nouveau rôle, il y aurait forcément l'un des deux coefficients V ou W qui ne pourrait plus être introduit

dans le système des trois formules en question constituées par ce procédé.

Enfin, pour avoir, encore avec une nouvelle double série d'arguments simples arbitraires, la forme de la troisième formule cherchée, c'est-à-dire celle caractérisée par l'absence de la fonction ψ relative aux arguments doubles, considérant de même la troisième double série de valeurs des u, v, w qui correspondrait, en vertu du système (III), toujours aux mêmes valeurs envisagées des λ, μ, ν, θ, il n'y aura plus qu'à substituer semblablement, à la place des dits λ, μ, ν, θ, les expressions (III), entendues de nouveau pour les arguments en question, dans la dernière équation (14), sans aucun arbitraire cette fois pour le choix de ladite équation, car celle-là seule pourra introduire dans le système à former le paramètre W, qui doit y entrer nécessairement.

La forme de chacune des trois équations cherchées étant ainsi mise en lumière pour trois doubles séries différentes d'arguments simples, composées chacune isolément d'éléments entièrement arbitraires, il suffira dès lors d'imaginer ensuite que ces trois séries se confondent en une seule, pour posséder effectivement les formules d'addition des trois fonctions hyperelliptiques (16)-(17) envisagées dans cette communication.

En résumé, pour symboliser ce résultat, si, tenant compte des expressions (1)-(3) qui définissent les symboles X, Y, Z, T en même temps que des valeurs (12) des coefficients constants et des définitions (15), et si, ayant égard à la signification admise pour les indices, nous convenons en outre à présent de désigner expressément par les mêmes symboles $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, ... $\mathcal{R}$, $\mathcal{X}$, ... $\mathcal{T}$, affectés d'un, de deux, ou de trois accents, les résultats de la substitution dans ces mêmes définitions, à la place des λ, μ, ν, θ, respectivement des expressions (I), (II), ou (III), le système complet des formules d'addition en question sera représenté sous forme explicite, pour deux séries d'arguments quelconques u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2, par les trois équations suivantes, qui sont les homo-

logues pour ce cas de celles (16) de la communication précédente (Annales, T. XVII, 1re *Partie*, p. 76) :

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{L}'^2 + \mathfrak{M}'^2 + \mathfrak{N}'^2 + \mathfrak{P}'^2 + \mathfrak{Q}'^2 + \mathfrak{R}'^2 \\
&\qquad = (b^2 + c^2 + d^2 - \mathrm{U})\,\mathfrak{X}'^2 + (c^2 + d^2 + a^2 - \mathrm{U})\,\mathfrak{Y}'^2 \\
&\qquad + (d^2 + a^2 + b^2 - \mathrm{U})\,\mathfrak{Z}'^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - \mathrm{U})\,\mathfrak{T}'^2, \\
&(c^2+d^2)\,\mathfrak{L}''^2 + (b^2+d^2)\,\mathfrak{M}''^2 + (b^2+c^2)\,\mathfrak{N}''^2 \\
&\qquad + (a^2+d^2)\,\mathfrak{P}''^2 + (a^2+c^2)\,\mathfrak{Q}''^2 + (a^2+b^2)\,\mathfrak{R}''^2 \\
&\qquad = (b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2 - \mathrm{V})\,\mathfrak{X}''^2 + (c^2d^2 + c^2a^2 + d^2a^2 - \mathrm{V})\,\mathfrak{Y}''^2 \\
&\qquad + (d^2a^2 + d^2b^2 + a^2b^2 - \mathrm{V})\,\mathfrak{Z}''^2 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - \mathrm{V})\,\mathfrak{T}''^2, \\
&c^2d^2\,\mathfrak{L}'''^2 + b^2d^2\,\mathfrak{M}'''^2 + b^2c^2\,\mathfrak{N}'''^2 + a^2d^2\,\mathfrak{P}'''^2 + a^2c^2\,\mathfrak{Q}'''^2 + a^2b^2\,\mathfrak{R}'''^2 \\
&\qquad = (b^2c^2d^2 - \mathrm{W})\,\mathfrak{X}'''^2 + (c^2d^2a^2 - \mathrm{W})\,\mathfrak{Y}'''^2 + (d^2a^2b^2 - \mathrm{W})\,\mathfrak{Z}'''^2 \\
&\qquad + (a^2b^2c^2 - \mathrm{W})\,\mathfrak{T}'''^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est à remarquer qu'en raison de la symétrie complète des définitions précitées des symboles X, Y, Z, T, par rapport aux variables λ, μ, ν en particulier, la substitution des valeurs de ces variables empruntées à l'un quelconque des trois systèmes (I), (II), ou (III), donnera le même résultat dans toute expression où ils entreront, lesdites valeurs ne faisant que se permuter entre elles pour un même indice, lorsque l'on passe de l'un de ces systèmes au suivant : d'où il suit que dans les trois formules que nous venons d'écrire, les expressions de la même quantité X, Y, Z, T, pour un même indice, ne différeront en réalité, en passant d'une équation à la suivante, que par l'interprétation des quantités θ_1 ou θ_2 empruntées aux systèmes précités, au sujet desquelles seules, par conséquent, on pourra se borner à envisager, pour ces substitutions, successivement trois modes d'interprétation distincts.

Observons également que, soit que nous eussions adopté, parmi les six modes d'interprétation possibles des équations (20) et (23), un groupe de trois de ces modes autre que celui consti-

tué par les systèmes (I), (II), (III), soit que nous eussions pris dans un autre ordre, avec les restrictions que nous avons indiquées, les trois équations du même système (14) pour représenter successivement les trois formules d'addition que nous nous proposions de trouver, le nouveau système ainsi formé n'eût différé à chaque fois du précédent (24) que par une certaine permutation des fonctions φ, ψ, ϖ entre elles, et par conséquent, eu égard à la complète symétrie des équations transcendantes (17) qui définissent ces fonctions, le système en question eût dû être considéré comme entièrement équivalent à celui qui vient d'être obtenu.

Les formules d'addition (24) que nous venons de trouver représentent, pour l'hypothèse de $m = 4$, c'est-à-dire pour les fonctions hyperelliptiques de la seconde classe, celles qui font l'objet du théorème général énoncé au paragraphe 7 des *Considerationes* de Jacobi, mentionné un peu plus haut, formules dont l'illustre Auteur se borne à certifier l'existence sans fournir aucune indication sur la forme même desdites équations. L'on trouvera cette forme indiquée explicitement au contraire dans notre communication précitée, du 13 Février 1893, à l'Académie des Sciences, dont la présente Note avait précisément pour but de présenter un exposé détaillé à propos d'un des deux cas particuliers les plus simples, le cas précédent relatif à l'hypothèse $m = 3$, c'est-à-dire aux fonctions analogues de la première classe, étant traité lui-même plus complètement encore dans la Note V de l'Appendice de notre *Mémoire sur la Recherche la plus générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme* (Annales, T. XVI, 1892, § II, pp. 298-326).

MÉMOIRE

SUR LA

RECHERCHE LA PLUS GÉNÉRALE

D'UN

SYSTÈME ORTHOGONAL TRIPLEMENT ISOTHERME

PAR

M. le Vte de SALVERT

Professeur à l'Université Catholique de Lille.

INTRODUCTION (*)

Parmi les questions d'ordre majeur que l'on rencontre dans l'Analyse des Surfaces, l'une de celles qui méritent le mieux de fixer l'attention, tant à cause de son intérêt propre que de l'importance de ses applications, est assurément la détermination, de la façon la plus générale possible, d'un Système Orthogonal triplement Isotherme. Mais, par une coïncidence heureuse, qui se rencontre d'ailleurs assez fréquemment dans la Science, parce qu'elle tire sa raison d'être de l'étroite connexité, dans les régions élevées, des divers ordres de spéculation mathématique, cette même question, dont la possession de la solution semble ainsi des plus désirables, se trouve être en même temps l'une de celles dont l'étude, considérée intrinsèquement, c'est-à-dire abstraction faite des conséquences du résultat à intervenir, présente à un esprit

---

(*) Ce Mémoire a été publié intégralement, sauf l'Introduction que l'on va lire, dans les cinq Tomes précédents, XIII-XVII, du présent Recueil.

curieux le plus d'attrait, en raison des problèmes d'Analyse multipliés et intéressants qui se posent successivement lorsque l'on veut en poursuivre la solution, et qui constituent dès lors comme autant de défilés ou d'obstacles qu'il faudra franchir l'un après l'autre avant de parvenir au terme de la recherche.

C'est à Lamé que revient l'honneur d'avoir posé le premier la question dans des termes tels que ces différents problèmes ne semblent pas inabordables, malgré la complication du sujet, dans l'état actuel de l'Analyse, et, en traçant d'une main sûre le programme des opérations successives à accomplir pour cet objet, d'avoir ainsi découvert et indiqué la route qui devra conduire sans incertitude à la solution tout entière de la question. Malheureusement, lorsqu'il en vient à traiter le problème, Lamé ne remplit ce programme que d'une manière insuffisante, et, pour l'une des opérations précitées tout au moins, la façon dont il l'accomplit et les procédés d'Analyse auxquels il a recours, ne créent aucune certitude quant à la généralité de la solution rencontrée par lui, laquelle devra dès lors, jusqu'à nouvel examen, être envisagée comme une solution remarquable, mais très particulière : en sorte que l'on est bien forcé de dire, qu'après avoir posé le problème, Lamé ne le résout pas, et que sa théorie, si remarquable qu'elle soit, laisse la question réellement ouverte quant à l'étendue et à la généralité de la solution.

C'est sans doute ce fait, que l'inventeur lui-même n'est arrivé, après des efforts considérables, à tirer de sa méthode qu'un résultat qui est loin d'être satisfaisant, qui semble avoir détourné, pendant un assez long temps, les Géomètres d'étudier la question du Système triplement Isotherme à l'aide de cette méthode elle-même, et de reprendre le problème d'Analyse dans les termes précis où Lamé l'avait posé : car les remarquables travaux qui ont été publiés sur la question, postérieurement au travail définitif de Lamé, par divers Géomètres éminents, tels par exemple que Bonnet (*) et M. Bertrand (**) font intervenir tous d'ingé-

(*) Journal de Liouville, Tome XIV, pages 401-416.
(**) Ibid., Tome IX, page 317.

nieuses considérations, d'ordre géométrique la plupart du temps, complètement étrangères, ou ne se rattachant que d'une manière éloignée, à la méthode exclusivement analytique spécifiée en termes si précis par l'illustre Auteur des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes.*

Ce n'est, à notre connaissance, que vingt-quatre années après le travail définitif de Lamé, nous voulons dire le *Mémoire sur les Surfaces Orthogonales et Isothermes* (*), qui est de 1843, que le problème se trouve repris incidemment, en 1867, exactement dans les mêmes termes, et traité assurément avec un progrès notable, quoique incomplètement encore, comme nous le dirons un peu plus loin, dans un remarquable Mémoire de M. Combescure, où l'Auteur traite avec un réel succès la question beaucoup plus générale et plus difficile des Coordonnées Curvilignes non Orthogonales (**). Puis, dix ans après, en 1877, le problème est enfin résolu pour la première fois d'une façon complète et satisfaisante, dans une brillante esquisse de quelques pages seulement de M. Enrico Betti, dont nous allons parler également tout à l'heure (***), mais qui, empruntant son point de départ aux récents travaux de Lipschitz et Christoffel sur les formes quadratiques de *n* différentielles, ne s'adresse point à la même catégorie de Lecteurs que le présent travail, et qui par conséquent, même en supposant celui-ci réduit à la seule recherche de la solution la plus générale du problème, ne lui enlèverait encore, croyons-nous, ni son utilité ni son intérêt.

Enfin, nous devons relater également ici que presque en même temps que le premier de ces Auteurs, en 1866, M. Darboux, dans une Thèse hors de pair (IV), dont le premier paragraphe, connexe à ce sujet, se trouve reproduit et amplifié douze ans plus tard, dans

---

(*) JOURNAL DE LIOUVILLE, Tome VIII, 1843 (pp. 397-434).

(**) ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, Ire série, Tome IV (1867). *Sur les Déterminants Fonctionnels et les Coordonnées Curvilignes*, page 93 [le § VII (p. 122), qui seul concerne le Système Isotherme, étant par conséquent seul en cause dans la relation sommaire que nous allons en faire].

(***) ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, Série II, Tome VIII (1877) (pp. 138-145.)

(IV) ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE, Ire série, Tome III (1866), pp. 97-141.

un Mémoire plus étendu sur les Coordonnées Curvilignes, (*) a résolu également par le fait le même problème par l'intégration directe des équations de Lamé relatives à la recherche des Systèmes Orthogonaux en général, en substituant à la condition de l'isothermie des trois familles de surfaces du Système, cette autre, plus générale, qu'elles soient comme elles divisées chacune en carrés infiniment petits par leurs lignes de courbure (**). Mais les équations qu'il intègre ainsi avec un rare bonheur, malgré la difficulté du problème, bien qu'empruntées au départ à la théorie de Lamé, ne sont donc pas celles posées par l'illustre Auteur pour la recherche du Système triplement Isotherme, mais correspondent à un problème plus général, dont l'idée n'a pu lui être suggérée que par la belle propriété de ce Système, découverte par M. Bertrand dans le travail déjà mentionné plus haut; et dès lors, le problème d'Analyse qu'il résout différant entièrement de celui que nous nous sommes proposé, il nous suffit d'avoir signalé ce travail remarquable, sans que nous ayons à en rechercher les points de contact qui pourraient exister avec le présent Ouvrage.

Nous n'établirons donc ici cette comparaison que relativement aux seuls Mémoires précités de Lamé, de M. Combescure, et de M. Betti.

Dans le travail dont nous voulons parler, de même que dans les *Leçons* (beaucoup plus connues) *sur les Coordonnées Curvilignes*, Lamé divise, comme on sait, la recherche en deux étapes ou problèmes subsidiaires distincts, l'un ayant pour but la détermination des paramètres différentiels des trois coordonnées curvilignes en fonction de ces coordonnés elles-mêmes, et l'autre celle de l'expression en fonction des mêmes coordonnées des trois coordonnées rectilignes, ou, ce qui revient au même, celle de l'équation des familles de surfaces qui composent le Système triple-

(*) IBID., IIe Série, Tome VII (1878). *Mémoire sur la Théorie des Coordonnées Curvilignes et des Systèmes Orthogonaux;* 3e Partie, § XVII, pp. 303-348.

(**) Voir notamment les deux derniers alinéas du travail en question, page 141 du Recueil indiqué dans la note précédente.

ment Isotherme. Pour le premier de ces problèmes (§§ IX-XVII), son analyse, bien qu'affreusement compliquée et d'une lecture extrêmement pénible, résout, il est vrai, la question pour le cas le plus général, d'une façon complète et satisfaisante. Mais il est bien loin d'en être ainsi quant au second problème subsidiaire, pour lequel son calcul élégant et facile, qui reproduit simplement celui des *Leçons sur les Coordonnées Curvilignes*, ne justifie que d'une façon très insuffisante la conclusion qu'il en formule, et ne crée nullement la certitude au sujet du théorème célèbre, ainsi découvert et articulé par lui, et auquel, à cause de cela, son nom restera néanmoins toujours justement attaché.

Ayant déduit, en effet, par la différentiation des équations du problème en question, qui sont du premier ordre et *non linéaires*, trois équations du second ordre linéaires, toutes trois de même forme, auxquelles devra satisfaire simultanément chacune des coordonnées rectilignes en particulier (*), Lamé se propose d'atteindre le but en calculant, à l'aide de considérations de symétrie, une solution commune à ces trois équations envisagées à la fois, et astreignant cette solution, une fois découverte, à satisfaire ensuite aux conditions relatives aux limites du Système, qui sont représentées précisément pour chaque famille par les plans coordonnés eux-mêmes.

Cette méthode serait légitime si, pour le calcul de cette solution commune, Lamé commençait par rechercher et obtenir effectivement l'intégrale la plus générale de l'une des trois équations en question en particulier, et, partant alors d'intégrales semblables, restreignait ensuite pas à pas les arbitraires qu'elles renfermeraient par l'obligation de satisfaire successivement, d'abord aux deux autres équations analogues, puis aux équations du premier ordre proposées elles-mêmes, et enfin, aux conditions relatives aux limites du Système. Mais ce n'est point là du tout la marche du calcul suivie effectivement par Lamé, ni les résultats réalisés par son analyse.

(*) Nous voulons parler des équations (159) de notre Chapitre V (page 395 du Tome I)

En effet, pour intégrer les équations linéaires du second ordre, qui sont à deux variables indépendantes seulement, Lamé emploie le procédé général de la Physique Mathématique, consistant à composer la solution d'une série infinie de solutions particulières, satisfaisant isolément aux diverses conditions imposées, et multipliées chacune par un coefficient indéterminé. Mais, bien qu'entraîné par l'analogie de ce nouveau problème avec ceux de la Physique Mathématique, pour lesquels ce genre de solution permet de satisfaire à la fois a toutes les conditions arbitraires *que comporte la nature physique de la question*, Lamé décore du nom d'*intégrale générale* la solution qu'il obtient par ce procédé pour l'une quelconque des trois équations du second ordre précitées (*), il est bien visible qu'une semblable solution ne saurait constituer, en réalité, l'*intégrale générale* (dans le sens que l'on attribue à ce mot en Analyse) d'aucune des trois équations en question; attendu que cette intégrale générale devrait renfermer deux fonctions entièrement arbitraires, tandis que l'indétermination des coefficients de la série envisagée, sur laquelle repose seule la généralité d'une solution ainsi formée, étant complètement épuisée par la seule condition que l'inconnue se réduise à une fonction arbitrairement donnée de l'une des variables indépendantes pour une valeur numérique donnée de l'autre variable, cette solution ne peut donc être considérée comme renfermant qu'*une seule* fonction arbitraire; et dans ces conditions, la solution d'où part Lamé, pour la restreindre ensuite comme nous l'avons dit, n'étant qu'une solution particulière, rien ne montre que cette solution soit la seule admissible, ni par conséquent que le résultat auquel aboutit son analyse contienne bien en réalité toutes les solutions possibles du problème.

En se plaçant à un autre point de vue, d'ailleurs, et sans rap-

(*) Ces équations, en effet, toutes simples qu'elles paraissent, offrent néanmoins une réelle difficulté quant à leur intégration générale, car bien que rentrant à la fois dans les deux types étudiés par LAPLACE et par AMPÈRE, elles ne réalisent pas les conditions exigées pour être intégrables, soit par l'une, soit par l'autre des méthodes qui s'y rapportent.

peler, comme nous venons de le faire, les caractères essentiels de l'intégrale générale en Analyse, il saute aux yeux que l'appareil analytique composé du signe sommatoire Σ et des coefficients indéterminés, dont Lamé fait état et s'autorise pour qualifier d'*intégrale générale* une semblable solution, ne saurait être *a priori* qu'un véritable trompe-l'œil dans la question actuelle, dont les équations primitives (celles du premier ordre) *ne sont pas linéaires*, attendu qu'alors chacune des séries ainsi envisagées ne pourra fournir une solution effective du problème qu'à la condition de se réduire à un seul terme, ainsi que Lamé est tout aussitôt contraint de le faire, en alléguant, il est vrai, des raisons tirées de considérations accessoires, mais commandé en réalité, en cela, sans qu'il fût nécessaire de faire intervenir ces considérations, par la nature non linéaire des équations du système.

La même critique s'applique exactement dans les mêmes termes à l'analyse de Lamé, pour la même partie de la recherche relative aux Cas particuliers du problème qu'il traite dans les cinq paragraphes précédents (§§ III-IX), et au sujet desquels nous nous bornerons en conséquence à signaler une grave omission de sa part dans l'énumération des dits Cas particuliers, et dans l'indication des solutions du problème non comprises dans la solution générale.

Lamé ne mentionne, en effet, dans son Introduction, relativement à cette dernière catégorie de solutions (page 399, avant-dernier alinéa, *in fine*), et par suite ne recherche et ne découvre dans son Mémoire, que les seuls Systèmes des Cylindres Isothermes, oubliant ainsi complètement les Systèmes des Cônes Isothermes en général, qui constituent une solution parallèle en quelque sorte à la précédente, et dont celle-ci peut être envisagée comme un cas-limite (*).

(*) LAMÉ ne mentionne, en effet, quelques lignes plus haut, que les seuls Cônes Isothermes *du Second Ordre*, lesquels rentrent très aisément dans la solution générale à l'aide d'un simple changement des constantes du Système, ainsi qu'il le fait voir lui-même dans son dernier paragraphe (§ XVII, pages 431-432).

Nous réparons cette omission, et donnons en son lieu les équations complètes de ce Système (formules 162 et 163, pages 231-232, Tome I), en mettant en lumière ce parallélisme des deux solutions en question, à l'aide d'une proposition intéressante qui, croyons-nous, n'avait pas encore été formulée (pages 235-236. *Ibid.*).

Enfin. quant aux applications que fait Lamé de son Système triplement Isotherme, et au parti qu'il tire ainsi de son admirable découverte, nous nous contenterons de rappeler qu'elles sont exposées en détail dans ses deux ouvrages très connus sur *les Coordonnées Curvilignes* et sur *les Fonctions Inverses des Transcendantes*, auxquels il nous suffira d'engager le Lecteur à se reporter.

Passons maintenant aux deux autres Mémoires qui ont successivement amélioré ou perfectionné l'analyse de Lamé.

Le premier paru, qui est celui de M. Combescure, apporte une simplification incontestable aux calculs touffus et d'aspect si peu engageant de son illustre devancier, et au point de vue de la clarté et de la facilité de la lecture, il marque donc un progrès sensible, pour le premier problème subsidiaire de Lamé, sur le Mémoire célèbre que nous venons de critiquer. Mais il est une part importante de cette recherche pour laquelle cette facilité ne nous semble obtenue dans son analyse qu'au détriment de la rigueur et de la certitude du résultat, et qu'il nous est, pour cette raison, impossible d'accepter, à savoir la partie de son calcul qui a pour but la détermination, en fonction de la coordonnée curviligne correspondante, de chacune des inconnues auxiliaires qu'il nomme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (nos fonctions Φ, Ψ, Π), et qui représentent les quantités A^2, — A_1^2, et A_2^2 de Lamé.

Étant parvenu, en effet, à déterminer, à l'aide d'un calcul remarquable par sa simplicité et son élégance, la forme de l'équation différentielle du premier ordre à laquelle devra satisfaire l'une de ces inconnues en particulier, il forme immédiatement les trois équations analogues correspondant aux trois fonctions précitées, c'est-à-dire, en fait, aux trois coordonnées

curvilignes, en changeant simplement, pour passer de l'une à l'autre, les dénominations de la fonction inconnue et de la variable indépendante, mais en maintenant « par symétrie », dit-il, *les mêmes coefficients constants* pour les trois équations à la fois (*loc. cit.*, pp. 125-126).

L'Auteur nous semble, en cela, faire un emploi tout à fait illégitime de la considération de la symétrie, et supposer gratuitement une propriété très particulière et remarquable de ces équations qu'il s'agissait en réalité d'établir, car la symétrie qui ressort des calculs antérieurs impose seulement l'obligation que ces trois équations *aient la même forme*, mais nullement que les coefficients des termes correspondants soient les mêmes constantes, en passant d'une équation à l'autre (*). Or, c'est précisément la démonstration de ce fait capital qui constitue, comme on le verra dans notre travail, la partie peut-être la plus difficile, ou tout au moins assurément la plus laborieuse, de cette première étape de la recherche, seule traitée d'ailleurs dans celui de M. Combescure.

Quant à la seconde, en effet, c'est-à-dire « quant à la déter-

---

(*) Si l'on devait donner à la notion de symétrie la signification restreinte que l'Auteur lui attribue indûment, à notre avis, dans cette circonstance, l'on serait conduit forcément à cette conclusion que, dans tout système de coordonnées curvilignes orthogonales, l'expression de celles-ci en fonction des coordonnées rectilignes serait toujours les trois racines d'une même équation en x, y, z, ou, en d'autres termes, que dans tout Système Orthogonal, les trois familles de surfaces qui le composent seraient nécessairement trois classes de surfaces comprises à la fois dans *la même* équation, chacune pour des limites différentes du paramètre. Or, il n'en n'est nullement ainsi dans la réalité, et si cette circonstance se trouve réalisée dans le Système Ellipsoïdal, ou des Coordonnées Elliptiques, elle constitue alors une propriété très remarquable, spéciale à ce Système et à celui plus général des surfaces du quatrième ordre, étudiées par M. Darboux dans le travail susmentionné, ainsi que cet éminent Géomètre le déclare en termes explicites dans les deux passages suivants de ses ouvrages : « Remarquons que ce système triple jouit de la propriété si remarquable du système des surfaces du second degré. Les trois familles qui le composent sont représentées par la même équation. » (*Mémoire sur la Théorie des Coordonnées Curvilignes*, etc., IIe Partie, § XI, *loc. cit.*, page 241, troisième alinéa.) « Ainsi notre système du quatrième ordre comprend comme cas particulier le système des surfaces homofocales du second degré, et comme lui, il est formé de trois classes de surfaces comprises dans la même équation... Tous les autres systèmes connus sont formés de trois séries de surfaces différentes... La propriété que nous signalons met donc à part les deux systèmes orthogonaux formés des surfaces du quatrième et du deuxième ordre. » (*Thèse d'Analyse*, § 2, p. 2, avant-dernier alinéa.)

mination finale de x, y, z, il n'y a rien, dit-il, à substituer au calcul de M. Lamé ». La critique que nous avons développée tout à l'heure, avec tout le respect dû au grand nom de Lamé, a montré suffisamment que ce n'était point là du tout notre sentiment, et que nous pensions, contrairement à l'avis de M. Combescure, que c'était *surtout* ce second calcul de l'illustre Auteur qui nous paraissait défectueux et contestable, et qui demandait, avant tout autre, à être repris sur d'autres bases et par d'autres procédés.

Venons enfin au dernier en date des travaux susmentionnés, à savoir celui de M. Betti.

Cette analyse beaucoup plus complète et plus satisfaisante que les deux précédentes, malgré l'extrême concision de sa rédaction qui dissimule imparfaitement la réelle complication de ses calculs, résout le second problème subsidiaire de Lamé en le ramenant, ainsi que nous le ferons nous-même, à l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales, ou, ce qui revient au même, à celui d'un système d'équations aux dérivées partielles à une seule inconnue. Mais pour traiter ce dernier problème, au lieu de procéder comme nous à une intégration directe du système en question, il se contente d'en démontrer l'intégrabilité (*), et ce fait une fois acquis, de remarquer, que ledit système étant linéaire et homogène par rapport aux inconnues, il suffira dès lors, pour avoir son intégrale générale d'en posséder trois solutions particulières, solutions qui lui sont fournies dès lors, sans calcul nouveau, par l'analyse élégante de Lamé qui, pour cet objet restreint, n'encourt plus aucun des reproches que nous étions dans l'obligation de

(*) Si l'on voulait partir, comme nous, des équations mêmes de LAMÉ, sans avoir recours aux notations et aux formules empruntées à la théorie des formes quadratiques de différentielles qu'emploie M. BETTI, la simple vérification de ces conditions connues d'intégrabilité pour le système envisagé serait alors tout aussi pénible et assurément beaucoup plus fastidieuse que l'intégration directe que nous faisons de ces mêmes équations. C'est pourquoi la marche du calcul adoptée par M. BETTI, qui est assurément moins naturelle, ne nous paraîtrait offrir alors aucune espèce d'avantage.

lui adresser tout à l'heure, pour le rôle tout différent qu'elle était destinée à remplir dans la théorie de l'illustre Géomètre.

Mais, bien que la question soit ainsi résolue complètement en un très petit nombre de pages, nous croyons que notre analyse, pour le moins aussi rigoureuse, paraîtra en réalité d'une lecture beaucoup plus facile, malgré qu'elle soit notablement plus longue, en même temps qu'elle n'exigera la connaissance d'aucune des théories récentes de haute Analyse auxquelles M. Betti a cru devoir, ainsi que nous l'avons déjà dit, emprunter le point de départ de ses calculs (*).

Enfin, quoique les deux systèmes d'équations aux dérivées

(*) Sans parler de l'appareil analytique assez insolite emprunté à ces théories encore fort peu connues, il s'est glissé malheureusement dans le travail très remarquable de M. Betti une série de fautes d'impression regrettables, qui, à l'avant-dernière page notamment, rendent l'enchaînement et les détails de son calcul complètement incompréhensibles pour qui ne connaîtrait pas la manière réelle dont il doit être rétabli.

N'ayant pas sous les yeux le volume même du Recueil dans lequel a été publié ce travail, et ignorant par suite s'il existe un *Erratum* où ces fautes soient indiquées et corrigées, nous croyons devoir signaler ici les plus importantes pour le Lecteur qui ne posséderait, comme nous, ledit travail qu'en exemplaire *tiré à part* ou *Extrait* du Recueil en question.

Sans parler de fautes évidentes, et qui se rétablissent très aisément, à la quatrième et à la dernière page, et pour nous borner à l'avant-dernière seulement :

1° A la 5e ligne de texte de cette page, il faut λ_s, μ_s, ν_s à la place de λ_i, μ_i, ν_i, et de même aussi dans la ligne d'équations qui suit celle-là, en y écrivant en même temps, pour plus de carté, $\sum_s$ à la place de $\sum$, ainsi qu'il est fait dans les équations subséquentes;

2° Dans les trois équations similaires qui suivent les équations (8), il faut, aux seconds membres, à la place de 0, respectivement B_1, B_2, B_3;

3° A l'équation suivante (unique), il faut de même au second membre, B_i à la place de 1.

Enfin, relativement à cette dernière équation elle-même, il semble qu'il eût fallu, pour le développement intégral de la méthode adoptée, et pour une démonstration complète à l'égard d'un Lecteur supposé ignorant de la proposition à établir, il eût fallu, à notre sens, disons-nous, s'assurer, avant de terminer, que les solutions particulières, désignées synthétiquement par le symbole Y_{si}, qu'il obtient par le calcul de Lamé, et dont il se sert quelques lignes plus bas pour constituer sa solution définitive, vérifiaient bien effectivement les équtions du type que nous venons de dire, car c'est sur cette hypothèse que repose l'interprétation qu'il donne des constantes d'intégration $\lambda_s, \mu_s, \nu_s, \lambda_{s'}, \mu_{s'}, \nu_{s'}$, et comme conséquence la réduction de la solution la plus générale du problème à la connaissance d'un seul Système satisfaisant à la question.

Assurément, ce dernier calcul n'est pas bien difficile à établir, une fois obtenu le résultat final auquel on doit arriver; mais encore était-il nécessaire, à notre sens, de mentionner, au moins en quelques mots, l'opération à faire pour cela, faute de laquelle le cycle des raisonnements nécessaires pour constituer la démonstration ne peut être considéré comme complet et définitivement fermé.

partielles successivement envisagés par M. Betti soient exactement, avec d'autres notations toutefois, ceux mêmes indiqués par Lamé, nous croyons devoir faire observer qu'il ne s'astreint pas à la marche si logique et si satisfaisante, indiquée par l'illustre Auteur et rigoureusement observée par lui, ainsi que par nous dans le présent travail (*), et consistant à intégrer ces deux systèmes successivement et séparément, nous voulons dire à n'aborder l'intégration du second que lorsque l'on est assuré, par la possession effective de la solution du premier, que cette solution existe réellement.

En effet, quant au premier de ces systèmes (c'est-à-dire pour le premier problème subsidiaire de Lamé), M. Betti se borne à calculer l'expression de l'élément d'arc ou, ce qui revient au même, celle des inconnues primitives H, H_1, H_2 en fonction des inconnues auxiliaires A, A_1, A_2 de Lamé, et ne se préoccupe en rien de rechercher celle de ces dernières inconnues en fonction des coordonnées curvilignes elles-mêmes. Or, comme on est ici sur un terrain analytique pour lequel les théories générales font complètement défaut (l'intégration de systèmes d'équations aux dérivées partielles *entre plusieurs inconnues*), et qu'on ne peut dès lors être certain de l'existence effective de ces quantités auxiliaires que lorsque l'on aura obtenu en réalité leurs expressions que nous venons de dire, l'existence de ces inconnues H, H_1, H_2 n'est donc nullement assurée dans la question par la seule possession de leur expression précitée en fonction des quantités A, A_1 A_2, prises comme inconnues auxiliaires pour la facilité du calcul ; et par suite, il semblera peut-être peu rationnel et méthodique de tenter laborieusement, à l'aide de procédés savants et compliqués, l'intégration du second des systèmes susmentionnés, dont les coefficients sont formés précisément avec les mêmes fonctions A, A_1, A_2 et leurs dérivées, et qui n'aurait plus dès lors aucune signification au cas où lesdites

(*) Et aussi par M. COMBESCURE, en supposant qu'il eût repris de même à nouveau le second problème subsidiaire de LAMÉ.

quantités n'auraient pas d'existence effective dans la question (*).

Rappelons enfin, en terminant cet exposé des travaux de nos deux devanciers, qu'admettant tous deux comme point de départ l'équation connue du Mouvement de la Chaleur, ils ne procèdent ni l'un ni l'autre à la recherche des Cas particuliers du problème non compris dans la solution générale, ni à l'étude des applications aux Coordonnées Curvilignes que l'on pourra faire des résultats obtenus pour ces solutions, soit particulières, soit générales, en sorte que leurs travaux que nous venons d'analyser correspondent uniquement à l'objet de nos Chapitres IV et V (**), lesquels, s'ils constituent au fond la partie la plus essentielle de notre Ouvrage, représentent à peine, comme étendue, la *septième partie* de son développement total seulement (117 pages sur 850). Il nous reste donc à présent, en faisant connaître le plan et la division de notre travail, à indiquer en quelques mots les raisons qui nous ont conduit à étendre d'une façon aussi notable le cadre des questions que nous y avons successivement introduites.

Cet Ouvrage, qui comprend ainsi, groupées en vue de l'Enseignement, tout un ensemble de questions en connexion immédiate avec la *Recherche la plus générale d'un Système Orthogonal triplement Isotherme* (titre sous lequel nous l'avons fait paraître par portions successives en forme de Mémoire)(***), est composé de deux Parties principales, formant le Tome I, subdivisées chacune en trois Chapitres, et d'un Appendice formant le Tome II, subdivisé lui-même en six Notes, lesquels seront consacrés aux objets suivants.

(*) En d'autres termes plus concis, le problème total du Système triplement Isotherme posé par LAMÉ consistant, d'une manière générale, dans l'intégration simultanée d'un système d'équations aux dérivées partielles entre les six inconnues H, H_1, H_2, x, y, z, qui se décompose lui-même en deux systèmes partiels dont l'un ne renferme que les trois inconnues H, H_1, H_2 seulement, la seule marche véritablement logique et rationnelle consiste évidemment à commencer par traiter celui-là, et à n'aborder le second que lorsqu'on sera assuré, par le succès de l'intégration relative au premier, que ce même système admet bien réellement une solution.

(**) Celui de M COMBESCURE même à notre seul Chapitre IV (50 pages), puisque cet Auteur ne traite que le premier problème subsidiaire de LAMÉ.

(***) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENT. DE BRUXELLES, Tomes XIII, XIV, XV, XVI et XVII.

Dans le Tome I, et la Première Partie intitulée ***Préliminaires et Cas Particuliers Remarquables***, le Chapitre I se propose pour but de remédier à l'insuffisance, universellement reconnue aujourd'hui, de la démonstration primitive de l'équation du Mouvement de la Chaleur, due à Fourrier et reproduite par Lamé, dont les procédés sont imités de ceux d'Euler en Hydrostatique, et de Bernoulli en Hydrodynamique, pour l'équation dite ***de continuité.*** Dans ce but, cette équation fondamentale, point de départ obligé de toute la théorie qui va suivre, se trouve établie, pour un système de coordonnées quelconque, à l'aide d'un raisonnement entièrement nouveau, présentant toutes les conditions de rigueur justement exigées à l'époque actuelle pour l'Enseignement classique; et le fait, que la forme de l'équation précitée est ainsi connue indépendante du système de coordonnées, envisagé, fait ressortir nettement, à l'aide d'une interprétation intuitive convenablement déduite, toute l'importance qu'offre la question du Système triplement Isotherme pour les différents problèmes de la Physique Mathématique, et justifie ainsi à l'avance le développement considérable des calculs qu'entrainera la recherche intégrale de toutes ses solutions.

A la vérité, tous les éléments essentiels qui constituent la démonstration que nous venons de dire se trouvent bien reproduits, avec d'autres notations et sans explications suffisantes, sous la forme d'une question générale d'Analyse, dans une courte Note du regretté M. Gilbert (l'un des derniers travaux qu'il ait publiés), en sorte que le Lecteur du présent Ouvrage pourrait être très naturellement amené à penser que nous l'avons empruntée en réalité à cet éminent Professeur. Il suffira, pour maintenir nos droits à la priorité de signaler ce simple fait, que le premier Chapitre de notre travail, dans lequel se trouve notre démonstration en question, a été publié dans le Tome XIII (1888-89) des ***Annales de la Société Scientifique de Bruxelles***, tandis que le travail similaire de M. Gilbert n'a paru que ***dans le Tome suivant*** XIV (1889-90) (soit ***un an*** entier ***plus tard***) de la même Revue (*).

(*) Le présent Ouvrage ne devant être offert au Public que quelques années après le travail en question de M. GILBERT, et le nom de cet Auteur ayant dans le monde savant une

Le Chapitre II, après avoir montré, d'après Lamé, comment s'introduit la notion des familles isothermes de surfaces, et rappelé les solutions fournies par l'illustre Auteur pour les questions fondamentales qui s'imposent au début de leur théorie, développe et applique une méthode nouvelle pour la recherche générale de semblables familles, méthode qui pourrait aussi bien être étendue en Analyse à la recherche des solutions de forme déterminée d'une équation quelconque aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes. Les résultats analytiques de l'application de cette méthode aux trois catégories de surfaces les plus simples et les plus usuelles, nous voulons dire le plan, la sphère, et les surfaces du second ordre en général, viennent compléter à un point de vue essentiel, pour la recherche de tous les Systèmes Isothermes sans exception, ceux déjà signalés par Lamé pour ces différentes classes de surfaces; et, étant formulés en théorèmes, pour en faciliter l'énonciation et le souvenir, ils nous fournissent alors, dans le Chapitre III suivant, la base solide qui nous garantira seule la certitude que notre analyse ne laissera échapper aucune solution possible du problème.

Le Chapitre III enfin pose, également d'après Lamé, les équations générales aux dérivées partielles auxquelles satisfait tout Système Orthogonal triplement Isotherme, et entame la question par l'examen des Cas particuliers remarquables, dont les uns, à savoir ceux qui constituent les trois systèmes de coordonnées classiques, pourront être déduits ultérieurement de la solution générale, ainsi que le fait voir en terminant Lamé (*loc citat.*, §§ XVII-XVIII, pp. 431-434), à titre de cas-limites, à l'aide d'un simple changement des constantes, tandis que les autres, ne pouvant être tirés de cette même solution générale par aucune modification des paramètres du Système, constituent en quelque

---

notoriété qui est bien loin de nous appartenir, l'on trouvera sans doute tout naturel que nous ayons à cœur de défendre notre priorité scientifique au sujet de cette démonstration qui nous paraît offrir un sérieux intérêt, pas seulement pour la question spéciale de la Chaleur, à propos de laquelle nous la formulons, mais encore pour l'équation de continuité en Hydrodynamique (ainsi que nous l'avions remarqué, et que le fait aussi M. GILBERT), à laquelle elle s'applique tout aussi exactement, en changeant purement et simplement le nom et l'interprétation physique de chacune des quantités qui y figurent.

sorte des solutions *singulières* du problème proposé, dont la recherche s'impose dès lors avec la même attention et la même rigueur que celle de cette solution la plus générale elle-même. Le caractère commun de ces solutions, tant particulières que singulières, étant, en effet, ainsi qu'on le reconnaît aisément de prime abord, d'admettre des surfaces développables dans la composition du Système, rien ne montre *a priori* que les plans, les cylindres, et les cônes soient les seuls genres de surfaces, empruntés à cette catégorie si étendue, qui soient capables de fournir des solutions, et par conséquent, que les deux Systèmes des Cylindres et des Cônes Isothermes constituent effectivement les deux seules solutions singulières que comporte le problème.

Le Lecteur voudra bien remarquer, au sujet de notre analyse relative à la détermination, tant de ces solutions particulières ou singulières dans ledit Chapitre III, que de la solution la plus générale dans les Chapitres suivants IV et V, le soin minutieux que nous apportons, parfois au prix d'apparentes longueurs, à toujours rechercher et obtenir effectivement la solution la plus générale possible pour chacune des questions partielles ou subsidiaires qui s'imposent à nous successivement, et dont la superposition constitue précisément, dans chaque cas, l'ensemble de la recherche; car, vu la multiplicité de ces problèmes subsidiaires, la moindre négligence à cet égard pour un seul d'entre eux suffirait pour ouvrir dans notre théorie comme une fissure, par laquelle pourrait nous échapper une part importante de la solution définitive, c'est-à-dire, en fait, pour enlever aux résultats de notre recherche le caractère certain d'universalité que nous avons le plus à cœur de leur imprimer, et dont la mise en évidence, à l'abri de toute contestation, constitue précisément l'un des intérêts principaux de notre travail.

Dans la Seconde Partie, consacrée exclusivement à l'examen du *Cas général du Problème et* des *Applications* qu'on en peut faire, le Chapitre IV poursuit et développe la solution du premier problème subsidiaire dont Lamé fait dépendre la recherche proposée, et consistant à déterminer de la façon la

plus générale les trois paramètres différentiels Δ_1, relatifs aux trois coordonnées curvilignes (les inconnues h, h_1, h_2 de Lamé, ou, ce qui revient au même, leurs inverses H, H_1, H_2) en fonction de ces coordonnées curvilignes elles-mêmes. C'est le problème résolu complètement par Lamé, dans son grand Mémoire analysé ci-dessus, par le moyen d'un calcul auquel on ne peut reprocher qu'une extrême complication et une allure fort pénible, problème repris depuis par M. Combescure, avec un réel bonheur, avons-nous dit, pour une part notable de cette recherche. Nous espérons que notre analyse, aussi simple et d'une lecture aussi facile que celle de ce dernier Auteur, quoiqu'entièrement différente, sera jugée plus complète et plus satisfaisante, en ce qu'elle ne prête pas le flanc à la critique que nous avons cru devoir formuler au sujet de ce même travail.

De même le Chapitre V poursuit et développe la solution du second problème subsidiaire de Lamé, connexe du précédent, consistant à déterminer, au moyen des résultats acquis par la recherche précédente, l'expression la plus générale des trois coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées curvilignes, détermination qui constitue dès lors la solution définitive du problème total lui-même. C'est le problème pour lequel l'analyse de Lamé nous semble, au contraire, insuffisante et inacceptable, et sur lequel M. Combescure n'a pas cru devoir porter son attention. Nous espérons également que la méthode que nous employons pour le résoudre, fondée, comme celle de M. Betti, sur l'intégration d'un système d'équations aux différentielles totales, paraîtra encore tout à fait satisfaisante, tout en étant notablement plus facile, et à la portée d'un beaucoup plus grand nombre de Lecteurs, que celle de cet habile Géomètre.

Le Chapitre VI enfin, qui termine le Tome I, et qui a pour objet l'application des résultats de la recherche précédente, c'est-à-dire la théorie des coordonnées curvilignes engendrées par le Système Orthogonal rencontré, représente peut-être la portion la plus entièrement nouvelle, quant au fond, des matières traitées dans ce volume ; car, bien que nous n'ayons nulle connaissance, quand nous avons poursuivi et rédigé nos recherches, des tra-

vaux antérieurs sur la question dont nous avons rendu compte un peu plus haut (*), il devait arriver forcément, en raison de l'identité du résultat final auquel il fallait parvenir, ue nous nous rencontrerions en un certain nombre de points avec l'un ou l'autre de nos devanciers, écueil qui n'est plus à redouter maintenant, de même aussi que pour les problèmes traités dans notre Chapitre III, du moment que Lamé seul s'est proposé comme objectif ce complément de sa théorie.

Notre tâche à cet égard consistant dès lors simplement à perfectionner les formules de l'illustre Auteur relatives aux coordonnées qui portent son nom, de manière à leur assurer un rôle pratique qui ne leur appartient malheureusement en l'état à aucun degré, nous croyons avoir réalisé ce programme d'une façon satisfaisante et réellement utile, par un ensemble de formules et de théories nouvelles qui, en conservant aux Coordonnées Thermométriques de Lamé l'avantage inappréciable de n'être susceptibles, comme les coordonnées classiques, que d'une seule détermination en chaque point de l'espace, leur assurent néanmoins le bénéfice si considérable de la symétrie et de la permutation circulaire, qui caractérisent le système des Coordonnées Elliptiques de Jacobi, en même temps qu'elles offrent d'autre part cette supériorité de n'admettre comme éléments analytiques que les seuls types de transcendantes classiques des *Fundamenta Nova*, de manière à pouvoir profiter pour les calculs de toutes les formules courantes de la théorie des Fonctions Elliptiques : nous fournissons une preuve incontestable de l'avantage et de la fécondité de ce Système des Coordonnées

(*) Notre travail ayant été composé et rédigé presque en entier en province, en l'absence de ressources bibliographiques suffisantes, nous avouons, non seulement avoir ignoré, pour ainsi dire jusqu'à la fin, que la question eût déjà été traitée d'une façon complète, mais même que nous ne nous serions certainement pas attelé à un aussi long et persévérant labeur, si nous n'avions été encouragé par l'illusion que l'honneur du résultat dût nous en appartenir. Toutefois, même après cette déception, nous croyons qu'il n'y a pas lieu de regretter complètement nos efforts et notre peine, et que, tant au point de vue de la rigueur des raisonnements et des calculs, que de la facilité d'exposition orale qu'ils présentent, à l'égard de jeunes auditeurs en possession des seules connaissances classiques, cet Ouvrage viendra remplir une place et un rôle qui n'étaient point encore occupés jusqu'ici.

Thermométriques ainsi modifié, en l'appliquant à de nombreux exemples, parmi lesquels la question suivante, à raison de son caractère concret, sera de nature à frapper davantage l'esprit du Lecteur : « Étant donné un corps homogène, limité par trois » couples de surfaces appartenant respectivement chacun aux » trois familles d'un Système Ellipsoïdal, déterminer exactement » l'action totale qu'exercera sur ce Solide, conformément à la » loi d'attraction de Newton, la masse entière d'un ellipsoïde » homogène de grandeur, de forme, et de situation quelconques » par rapport au Solide envisagé. » L'emploi de nos nouvelles coordonnées pour traiter cet intéressant problème nous permet, en effet, comme on le verra, grâce à la permutation circulaire, sur les dix-sept déterminants dont est composée la solution, de n'en calculer que *sept* seulement, et les formules finales auxquelles nous arrivons ainsi, non seulement résolvent le problème complètement quant à la forme analytique des résultats, parce qu'elles ne renferment que des quadratures réellement *effectuées*, mais encore sont calculables *numériquement* avec telle approximation que l'on voudra.

Le même caractère de nouveauté appartient encore, croyons-nous, à la plupart des matières traitées dans notre Tome II, lequel comprend, avons-nous dit, six Notes distinctes réunies en *Appendice*, et relatives à d'autres modes de résoudre les mêmes questions déjà envisagées dans le Tome I, ou bien, consacrées à déduire à très peu de frais, des calculs développés dans ce volume en vue de la recherche générale du Système Isotherme, d'autres résultats importants d'Analyse qui ne se rapportent pas à cette question elle-même. Nous croyons en conséquence devoir indiquer également ici, en quelques mots, l'objet de chacune de ces six Notes.

La première, appliquant, à titre d'exemple le plus étendu, à l'équation la plus générale des Surfaces du Second Ordre la méthode développée dans le Chapitre II pour la recherche des familles isothermes de surfaces, retrouve les résultats déjà obtenus, par le moyen d'un calcul qui met en œuvre, à l'aide d'une notation condensée, la considération d'un système sura-

bondant de *trente-cinq* équations différentielles du second ordre entre les *dix* coefficients de l'équation de la famille de surfaces considérés comme inconnues.

La seconde Note concerne la recherche directe d'un Système Orthogonal comprenant parmi ses trois familles le type le plus général des Surfaces Isothermes du Second Ordre, et parvient, la question étant ainsi posée, au Système Ellipsoïdal de Jacobi et Lamé, par le moyen de l'intégration *d'une seule* équation différentielle du *premier ordre*, à savoir celle des lignes de courbure de la famille de surfaces proposée.

La Note III reprend le second problème de Lamé, déjà résolu dans le Chapitre V, par une autre méthode, absolument nouvelle celle-là, croyons-nous, qui tire son point de départ de la célèbre méthode d'intégration de Lagrange pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, et dont la fécondité se trouve établie péremptoirement par ce fait que c'est précisément cette même méthode, généralisée pour un nombre quelconque d'inconnues et de variables indépendantes, qui nous a conduit à l'expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique à $n+1$ variables, que nous avons fait connaître dans notre communication à l'Académie des Sciences, du 6 Février 1893.

La Note IV, en vue de comparer les deux méthodes ainsi successivement exposées dans le Chapitre V et la Note III précédente pour le second problème subsidiaire de Lamé, en fait successivement l'application au Cas particulier du Système Sphérique déjà étudié dans le Chapitre III, et emploie à cet effet, pour l'intégration du système de trois équations aux dérivées partielles (à une seule inconnue) auquel se ramène le problème, la méthode exposée par Jacobi dans les *Vorlesungen* (33e Leçon, pp. 257-264), pour le cas de deux équations seulement.

La Note V déduit en quelques lignes des résultats de la Note III ci-dessus un énoncé du Théorème d'Abel, qui offre la particularité et l'avantage de formuler explicitement les deux équations qui constituent l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique à trois variables, intégrale dont l'existence est simplement certifiée, mais la forme non indiquée, dans l'énoncé

analogue du § 8 des *Considerationes Generales de Transcendentibus Abelianis*, de Jacobi (*), et elle en déduit très aisément la forme également explicite des formules d'addition des fonctions hyperelliptiques de première espèce et de la première classe, annoncées de même, sans aucune indication quant à leur forme, dans le Théorème précédent du § 6 des mêmes *Considerationes*. Enfin, elle déduit de cet énoncé du Théorème d'Abel une démonstration simple des formules d'addition pour les trois espèces de fonctions elliptiques à la fois, et pose ainsi les fondements d'une théorie sommaire de ces fonctions issue exclusivement de la considération du Système Ellipsoïdal, et analogue par conséquent à celle que Lamé institue et développe dans ses *Leçons sur les Fonctions Inverses*, mais relative cette fois aux types classiques eux-mêmes, et pour les trois espèces de fonctions elliptiques considérées simultanément.

La Note VI, enfin, reprend à nouveau par d'autres procédés la détermination d'intégrales triples déjà calculées dans le Chapitre VI, et rencontre ainsi, chemin faisant, l'expression explicite, intéressante et peu connue, des trois quadratures connexes $\int_0^\omega \varphi^m(\omega)\,d\omega$, le symbole φ désignant successivement les trois fonctions elliptiques de première espèce *sn*, *cn*, *dn*, et l'exposant *m* une puissance entière positive quelconque.

Tel est le cycle des questions d'un intérêt incontestable, aussi bien au point de vue de l'Analyse pure qu'à celui des applications à la Physique Mathématique, que nous nous proposons de traiter complètement dans le cours de cet Ouvrage, avec un esprit, sous une forme, et dans un but manifestement didactiques. Ce programme nous impose étroitement certaines obligations dont le Lecteur voudra bien nous tenir compte, lorsqu'il lui semblera que nous exigeons trop de son attention et de sa patience, par de trop longs calculs, ou des développements en apparence exagérés, lesquels seront, en réalité, nécessités par

(*) JOURNAL DE CRELLE, Tome IX (pp. 394-405).

l'obligation de procurer, avant toutes choses, une complète rigueur dans nos raisonnements et une parfaite certitude dans les résultats de nos calculs. De cette même pensée procède, en particulier, notre habitude presque constante de traiter chaque question, à titre de contrôle, par deux ou trois (et parfois même par quatre) procédés différents, notre but en cela étant surtout de chercher à inculquer aux jeunes débutants dans les recherches analytiques, une précieuse discipline, consistant à n'accorder jamais une confiance absolue à une méthode ou à un calcul, si l'on n'a pu en corroborer l'exactitude en retrouvant, à titre de vérification, les mêmes résultats par une voie différente.

Qu'on nous permette enfin, toujours au même point de vue, d'indiquer, en terminant, trois procédés généraux inspirés du même esprit, que nous aurons occasion d'employer un grand nombre de fois dans le cours de ces recherches, et qui contribueront pour une large part à en assurer le succès :

1° Avant d'entamer le calcul relatif à chaque recherche partielle, nous commencerons toujours par en apprécier *a priori* le degré de généralité de la solution, c'est-à-dire par évaluer exactement le nombre de fonctions ou de constantes arbitraires que devra renfermer la solution la plus générale, en sorte que si, par un procédé quelconque, nous venons ensuite à rencontrer une solution qui réalise précisément ces conditions, nous pourrons alors affirmer en toute certitude que cette solution-là est bien la solution la plus générale demandée.

2° Ayant à intégrer un système d'équations (différentielles ou aux dérivées partielles), si par la différentiation, plusieurs fois répétée au besoin, nous pouvons en déduire un autre système plus simple ou plus facile à intégrer que le proposé, nous intégrerons ce dernier système dont la solution sera dès lors plus large que celle qui convient à la question, et nous chercherons ensuite à disposer des arbitraires (constantes ou fonctions) surabondantes ainsi existant dans cette solution, de manière à procurer la vérification, par la même solution, du système proposé lui-même.

3° Comme *règle constante et absolue*, dont nous ne nous

départirons pas dans tout le cours de cette étude, nous ferons en sorte de n'introduire, comme éléments du calcul, que des quantités, et de n'écrire que des équations ou formules, obéissant à une loi de permutation circulaire évidente, condition à laquelle ne satisfait pas malheureusement la théorie de Lamé; et dans cette pensée, même lorsque nous transcrirons simplement ses calculs pour quelques questions, ou rappellerons ses procédés, nous aurons soin de substituer à sa notation relative au Système Ellipsoïdal, dans laquelle les carrés des demi-distances focales sont 0, b^2, c^2, celle plus avantageuse de Jacobi, dans laquelle les mêmes quantités sont exprimées par trois différences symétriques : $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$.

Enfin, comme dernier détail [purement matériel, si l'on veut, mais dont l'importance pour l'exposition orale sera reconnue par quiconque se proposera, comme nous, d'enseigner cette théorie (*)], nous substituerons également, en règle constante, un système de notation par algorithme littéral et individuel (φ, ψ, ϖ; P, Q, R; Φ, Ψ, Π; ...) au système de notation par indices de Lamé (ρ, ρ_1, ρ_2; Q, Q_1, Q_2; A, A_1, A_2; ...), qui, d'une énonciation moins claire et moins facile, et beaucoup plus fatigant pour les yeux, le devient aussi, par là même, assez rapidement pour l'esprit, tant du Professeur que de l'Élève.

En résumé, l'Ouvrage que l'on va lire, répondant à une double pensée, se propose à la fois deux objectifs et présente, en conséquence, deux caractères, qui se nuiront peut-être réciproquement dans l'esprit du Lecteur, parce que l'on n'est guère habitué à les trouver réunis dans une même publication, à savoir celui de *Mémoire*, ou de travail de recherches ayant pour but de consolider, d'améliorer, ou d'accroître les résultats déjà acquis

---

(*) Cet Ouvrage, de même que nos deux précédents Mémoires *Sur la Théorie de la Courbure des Surfaces*, et *Sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes dans les Problèmes de Mécanique*, mentionnés un peu plus loin, a été composé en vue de Leçons orales faites à l'Université Catholique de Lille, à titre de Conférences aux jeunes Licenciés, aspirants au Doctorat ès Sciences Mathématiques, et avec la pensée de leur faciliter la lecture des œuvres de LAMÉ et de JACOBI.

dans le domaine de la question envisagée, et celui d'*Ouvrage Didactique* se proposant simplement celui de faciliter et de perfectionner l'exposition de ces mêmes résultats antérieurs, en les rendant en même temps accessibles au plus grand nombre d'esprits possible.

En effet, sans revenir sur les modestes compléments que nous pensons avoir apporté utilement, ainsi que nous l'avons dit, à la théorie de l'illustre inventeur des Coordonnées Curvilignes, le présent Ouvrage étant joint à nos deux précédents Mémoires *Sur la Théorie de la Courbure des Surfaces* (*) et *Sur l'Emploi des Coordonnées Curvilignes dans les Problèmes de Mécanique* (**), ils constituent alors ensemble, croyons-nous, une exposition intégrale, parfaitement conforme aux exigences rigoureuses de l'Enseignement actuel, de toute la partie théorique de l'œuvre si remarquable et si féconde de Lamé, complétée et éclairée par des emprunts convenables aux parties connexes des admirables travaux de Jacobi, le tout sous une forme, et exclusivement à l'aide de procédés, qui soient à la portée des jeunes débutants dans la carrière scientifique, nous voulons dire des intelligences en possession des seules connaissances classiques.

Nous adressons donc notre travail, encore une fois, contrairement à l'usage, à deux catégories de Lecteurs entièrement différentes, à savoir les Savants, et ceux qui travaillent actuellement en vue de le devenir, et nous espérons que la première y trouvera néanmoins suffisamment son compte, par les éléments nouveaux et véritablement utiles que nous croyons y avoir apportés, pour tolérer, par ailleurs, avec indulgence les développements introduits en vue et dans l'intérêt de la seconde, lesquels motivent seuls l'étendue, exagérée en apparence, donnée ainsi à une simple monographie telle que celle que nous soumettons au jugement du Public.

(*) Annales de la Société Scientifique de Bruxelles. Tome V (1880-1881).
(**) Ibid., Tomes X (1885-1886), et XI (1886-1887).

TABLE DES MATIÈRES (*)

TOME I.

(*) Dans cette *Table des Matières*, de même que dans l'*Erratum* qui la suit, les numéros des pages indiqués sont ceux relatifs à la pagination propre au Mémoire, c'est-à-dire ceux inscrits au coin de chaque page dans les différents volumes du présent Recueil.

Pages.

CHAPITRE V. — Détermination, pour le cas le plus général, de l'expression des trois coordonnées rectilignes en fonction des coordonnées curvilignes.

CHAPITRE VI. — Formules nouvelles pour l'emploi des Coordonnées Thermométriques. — Exemples d'application pour le calcul des intégrales triples, et vérification des résultats ainsi obtenus à l'aide de déterminations connues en Mécanique.

TOME II.

ERRATA.

TOME I.

Page 14, dernière ligne de l'énoncé en italiques, au lieu de « *toutes les autres données égales* », lire « *tous les facteurs donnés égaux* ».

— 16, lignes 11 par en haut, et 5 (de texte) par en bas, après les mots « quantité totale de chaleur gagnée », rétablir les mots omis « ou perdue ».

— 25, 7e ligne de texte, *idem*.

— 55, l'équation (47) doit être rétablie ainsi qu'il suit

$$k^2h^2(\rho^2)^3-[k^2(x^2+y^2+z^2)+(1+k^2)h^2](\rho^2)^2+[x^2+y^2+k^2(x^2+z^2)+h^2]\rho^2-x^2=0.$$

— 73, équation (65), au second membre, au lieu de

$$\frac{1}{P}(P\rho^2-\cdots),\qquad \text{lire}\qquad \frac{1}{P}(P^2\rho^2-\cdots).$$

— 104, lignes 9 et 10 de texte, au lieu de « l'équation (128) comprendra bien alors dans l'expression de ses coefficients (129) », lire « l'ensemble des coefficients de l'équation (128) comprendra bien alors dans leur expression (129) ».

— 117, 4e ligne de la note, au lieu de (pp. 98-99), lire (pp. 98-100).

— 118, dernière ligne du texte, après les mots « les trois axes », intercaler ceux-ci « de chaque surface en particulier ».

— 143, 3e ligne *par le bas* de la note, au lieu de « se produira », lire « se produisant ».

— 147, ligne d'équations qui suit celles (32), au lieu des premiers membres,

$$\Psi'\frac{d\Psi}{dx}=\cdots,\quad \Psi'\frac{d\Psi}{dy}=\cdots,\quad \Psi'\frac{d\Psi}{dz}=\cdots,\qquad \text{lire}\qquad \Psi'\frac{d\psi}{dx}=,\quad \Psi'\frac{d\psi}{dy}=,\quad \Psi'\frac{d\psi}{dz}=\cdots$$

— 154, équation de droite (ϵ) de la note, au lieu de

$$\mathcal{F}_0(x+iy)\qquad \text{lire}\qquad \mathcal{F}_2(x-iy).$$

— 158, 4e ligne de texte, au lieu de « dont la première », lire « en sorte que la première ».

— 160, équations (50), dans les premiers membres, au lieu de

$$\Delta_1\psi \quad \text{et} \quad \Delta_1\varpi,\qquad \text{lire}\qquad \Delta_1^2\psi \quad \text{et} \quad \Delta_1^2\varpi.$$

— 202, dernier terme de la dernière ligne d'équations du groupe qui suit celles (121) au lieu de

$$\frac{(x^2+y^2)}{z^4}\qquad \text{lire}\qquad \frac{(x^2+y^2)^2}{z^4}.$$

Page 217, avant-dernière ligne de texte, au lieu de « des deux équations », lire « des trois équations ».

— 220, 4e ligne, au lieu de « formules (65) » lire « formules (67) ».

— 231, 3e ligne de texte, au lieu de (48), lire (40).

— 232, 6e ligne, *par le bas*, au lieu de « fractions », lire « fonctions ».

— 240, 4e ligne de la note, au lieu de « ω et χ (111) », lire « ω et χ (46) ».

— 241, 4e ligne d'équations de la note, au second membre de l'équation de droite, au lieu de $\sin \overline{v}$, lire $\sin v$.

— 249, équation de droite (182), au lieu de

$$(\text{sn U dn V} - \text{sn V dn U})^2 \qquad \text{il faut} \qquad (\text{sn U dn V} + \text{sn V dn U})^2.$$

— 257, 4e ligne de texte, après le mot « Or, » rétablir les mots omis : « chacune des équations (13) se réduisant alors à un seul terme, par exemple ».

— 265, 6e ligne de texte, au lieu de « des plans ϖ », lire « des plans φ ».

— 280, 8e ligne de texte, au lieu de « la page 62 », lire « la page 48 ».

— 285, 2e ligne de texte, au lieu de

$$\frac{P}{\psi}, \quad \frac{Q}{\varpi}, \quad \frac{R}{\varphi} \qquad \text{lire} \qquad \frac{R}{\psi}, \quad \frac{P}{\varpi}, \quad \frac{Q}{\varphi}.$$

— 310, 3e ligne de texte, *par le bas*, au lieu de (30), lire (30) et (31).

— 317, 2e et 3e ligne de la note *par le bas*, au lieu de « $1.2 + 2.1.2 = 6$, au total *douze* », lire « $1.2 + 2.2.1.2 = 10$, au total *seize* ».

— 330, 1re et 2e lignes de la note, *par le bas*, au lieu des mots « réel et plus petit que l'unité », lire « ou à son complémentaire, tous deux réels et plus petits que l'unité ».

— 351, 10e ligne de texte, au lieu de « indiqué seul », lire « employé seul ».

— 353, 3e et 4e lignes de texte, au lieu de « mais que n'indiquent cependant ni Lamé ni Betti », lire « qui est bien indiqué, mais non utilisé par Lamé ».

— 355, 1re ligne d'équations, dernier terme, au lieu de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{H}{\psi}L + \cdots, \qquad \text{lire} \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{lH}{\psi}L + \cdots\right.\right.$$

— 372, dernière ligne d'équations, au lieu de

$$+ \nu^2 f(\mu) \qquad \text{lire} \qquad + \}\, \nu^2 f(\mu).$$

— 377, 2e et 3e lignes, au lieu des mots « chacune comme une solution », lire « comme constituant ensemble une solution ».

— 385, équations (151), dernier terme de la première, au lieu de $\Lambda_3)^2$, il faut $\Lambda_3^2)$.

Page 385, 3e ligne, *par le bas*, après le mot « vérifient » rétablir le mot omis « simultanément.

— 387, 3e ligne de texte de la note, au lieu de (148), lire (147).

— 404, 4e ligne, au lieu de (page 27), lire (page (127).

— 424, 1re ligne, au lieu de (178bis), lire (178).

— 424, 4e ligne, au lieu de « par le système », lire « pour le système »

— 429, 12e ligne, au lieu de « à ce plan », lire « au plan des xy ».

— 433, 4e ligne, *par le bas*, au lieu de (157), lire (158).

— 435, équation de gauche (γ) de la note, au lieu de $-i\mathrm{K}_1 = \ldots$ lire : $i\mathrm{K}_1 = \ldots\ldots$

— 442, 2e ligne de texte, au lieu de « D'autre part », lire « De même ».

— 459, au dernier membre de la dernière équation du tableau (72), au lieu de

$$\sqrt{-(1-k^2)(1-k^2l^2)}, \quad \text{il faut} \quad \sqrt{-(1-l^2)(1-k^2l^2)}.$$

— 466, dans les deux dernières lignes d'équations de la note, au dernier membre de la première, au lieu de

$$\mathrm{H}_2du^2 + \mathrm{K}_2dv^2 + \mathrm{J}_2dw^2, \quad \text{il faut} \quad \mathrm{H}_8du^2 + \mathrm{K}_8dv^2 + \mathrm{J}_8dr^2,$$

et aux premiers membres de la seconde, au lieu de

$$\mathrm{H}_2 = \mathrm{K}_2 = \ldots, \mathrm{J}_2 = \ldots, \quad \text{il faut} \quad \mathrm{H}_8 = \mathrm{K}_8 = \ldots, \mathrm{J}_8 = \ldots.$$

— 473, 10e ligne de texte, *par le bas*, au lieu de « chaque élément », lire « chaque terme ».

— 476, 5e et 6e lignes, au lieu de « $-lk'_1$ à $+lk'_1$ » lire « $-l$ à $+l$ ».

— 487, 4e ligne d'équation, pour le dernier terme, au lieu de

$$\frac{2\alpha!}{(\alpha-2)!}\frac{(-1)^2}{1.2}\frac{g^4}{1.2}, \quad \text{il faut} \quad \frac{2.\alpha!}{(\alpha-2)!}\frac{(-1)^2}{1.2}\frac{g^4}{1.2}.$$

— 487, 4e ligne de texte, au lieu de (106) lire (109).

— 489, 6e ligne de texte, supprimer les mots « comme nous l'avons dit ».

— 500, rétablir le numéro omis (130bis) devant le premier groupe d'équations.

— 501, 5e ligne, après les mots « jusqu'à $i-1$ », rétablir les mots omis « valeurs qui sont ».

— 502, 3e ligne de texte, au lieu de « relatifs » lire « relatives ».

— 504, rétablir le numéro (133bis) devant l'équation qui suit celle (133).

— 513, Dans la rubrique en majuscules, au lieu de « LES ÉLÉMENTS », lire « LES EXPRESSIONS ».

— 516, 4e ligne, au lieu de (109), lire (100).

— 519, équation (141), au lieu de

$$\overline{\mathrm{T}} = -\mathrm{T}_{\alpha+4} = \cdots, \quad \text{lire} \quad \overline{\mathrm{T}} = -\overline{\mathrm{T}}_{\alpha+4} = \cdots$$

Page 528, équation qui suit le groupe (151bis), au lieu de

$$p\sqrt{P} = \cdots, \qquad \text{lire} \qquad p\sqrt{P} = \cdots.$$

— 549, dernière ligne de la note, au lieu des mots « et les termes », lire « et les quantités H_x, H_y, H_z, qui entrent dans les termes ».

— 551, dernière ligne, au lieu de (pp. 474-475), lire (page 482).

— 552, équation du milieu (179), à la 1re ligne du déterminant, pour l'élément de la 2e colonne, au lieu de $m^3(\text{sn}^3 u)$?, il faut $m^3(\text{sn}^3 v)$?.

— 570, rétablir le numéro omis (206) devant l'unique groupe d'équations de cette page.

TOME II.

Page 11, 2e et 3e lignes, au lieu de « fonctions connues », lire « facteurs communs ».

— 43, 5e ligne de texte, au lieu de (137), lire (138).

— 70, 14e ligne, *par le bas*, après le mot « solution », intercaler les mots omis « de la forme (8) ou (49) ».

— 85, équation (69); pour les coefficients des trois derniers termes, au lieu de

$$2D_1, 2E_1, 2F_1, \qquad \text{il faut simplement} \qquad D_1, E_1, F_1.$$

— 85, 2e équation de la première ligne (71), au lieu de

$$= c^2 + a^2 + b^2, \qquad \text{lire} \qquad = c^2 + a^2 - b^2.$$

— 91, équation (85), au lieu des coefficients $2D_2$, $2E_2$, $2F_2$, écrire simplement D_2, E_2, F_2.

— 128, équations (53), au terme du milieu de la première ligne, au lieu de

$$\sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2 \varpi} - U^2}, \qquad \text{il faut} \qquad \sqrt{\frac{V}{\text{csh}^2 \varpi} - U^2}.$$

— 145, équation (81) au second membre de l'équation de gauche, au lieu de

$$\frac{U^2}{V - U}, \qquad \text{il faut} \qquad \frac{U^2}{V - U^2}.$$

— 147, dans la note, la dernière ligne des équations (α') doit être rétablie ainsi :

$$\sin Z = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2 V - U^2}{V - U^2}}, \qquad \text{tang}\, Z = \pm \frac{\sqrt{\alpha^2 V - U^2}}{\gamma \sqrt{V}}.$$

— 149, dans la note, à la 3e ligne des équations (θ), pour coefficient de l'avant-dernier terme dans la parenthèse, au lieu de -2α, lire $+2\alpha$.

Page 151, dans la note, seconde ligne d'équations, pour le dernier terme, au lieu de

$$-\psi^2 \operatorname{csh} \varpi \, M \, . \, \operatorname{sn} h \, \varpi \, . \, \psi \operatorname{csh} \varpi \, . \, \psi \operatorname{csh} \varpi \sqrt{\alpha^2 V - U^2},$$

il faut simplement

$$-\psi^2 \operatorname{csh} \varpi \, M \, . \, \operatorname{sn} h \, \varpi \, . \, \psi \operatorname{csh} \varpi \sqrt{\alpha^2 V - U^2}.$$

— 151, équation (x), dernier terme, dernier facteur, au lieu de γp, lire γq.

— 173, 5ᵉ ligne de texte, *par le bas*, au lieu de u^2, lire u_p^2.

— 176, 8ᵉ ligne, au lieu de « le suivant se réduira », lire « les suivants (23) ou (26) se réduiront ».

— 176, 10ᵉ ligne, au lieu de (23), lire (28).

— 178, dernière ligne de la note, au lieu de « XIII, p. 55 » lire « IX, p. 394 ».

— 187, 3ᵉ ligne de texte, *par le bas*, au lieu de « u_2 en $u_2 + u_3$ et v_2 en $v_2 + v_3$ », lire « u_2 en u_3, v_2 en v_3, puis u_1 en $u_1 + u_2$ et v_1 en $v_1 + v_2$ ».

— 191, supprimer l'alinéa entier commençant par les mots « ces formules... ».

— 191, 6ᵉ et 7ᵉ lignes, supprimer le dernier membre de phrase de l'alinéa à partir des mots « qui sera également... ».

— 197, équation qui suit celle (63), pour le dernier terme, au lieu de

$+ (b^2c^2 + \cdots)$, il faut lire $- (b^2c^2 + \cdots)$.

— 202, équations (70), les valeurs de Y_1 et de Z_2 doivent être rétablies ainsi qu'il suit :

$$Y_1 = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{b^2 - a^2}}\,(b^2 + \nu_1), \qquad Z_2 = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2}}\,(c^2 + \nu_2).$$

— 220, dernière équation (108), dernier terme, au lieu de

$\frac{2}{in}\lambda_0$, lire $\frac{2}{in}\rho_0$.

— 220, seconde ligne des équations (109), au premier membre de l'équation de droite, au lieu de $c^2 + \lambda$, il faut $c^2 + \mu$.

— 226, équation (125), au second membre, au lieu de

$m^2\alpha^2 - n^2\beta^2$, il faut lire $\sqrt{m^2\alpha^2 - n^2\beta^2}$.

— 227, seconde ligne du second groupe d'équations, au lieu de

$= \varphi(r)[\ldots$, lire $= \frac{1}{4}\varphi(r)[\ldots$.

— 232, dernière équation (136), au dénominateur du second membre, au lieu de

$\operatorname{sn} h$, il faut $\operatorname{sn}^3 h$.

— 240, équation (149), au dernier terme dans les crochets, au lieu de

$\Pi(h - iK'), \omega)$, il faut simplement $\Pi(h - iK', \omega)$

Page 242, dernière ligne d'équations, au second membre, au lieu de

$$\int_{K'}^{h}\dots, \qquad \text{il faut} \qquad \int_{iK'}^{h}\dots.$$

— 248, les trois équations (2) doivent être rétablies ainsi qu'il suit :

$$\overline{\Omega_m} = (\mathrm{sn}^m\omega\,\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega)_1^2, \qquad \overline{\Omega'_m} = (\mathrm{dn}^m\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,\omega)_1^2, \qquad \overline{\Omega''_m} = (\mathrm{cn}^m\omega\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega)_1^2.$$

— 254, 3e et 4e lignes de la note, *par le bas*, au lieu de « l'exposant m pair, c'est-à-dire, celles de $m = 0$, ou $m = 2$, » lire « l'exposant α pair pour les sommes (96), c'est-à-dire celles de $\alpha = 0$, ou $\alpha = 2$, »

FRAGMENTS

D'UN

COURS D'OPTIQUE

PAR

P. DUHEM

Maître de conférences à la Faculté des sciences
de Rennes.

INTRODUCTION.

L'optique physique est née de l'idée cartésienne que la lumière consiste en mouvements très rapides d'un corps spécial, l'*éther ;* ses développements ont été intimement pénétrés par les idées de l'hydrodynamique d'abord, de l'élasticité ensuite, et, pendant longtemps, la théorie mécanique de la lumière a été admise comme un dogme ; les désaccords qui ont éclaté entre l'optique et l'élasticité ont commencé à ébranler quelque peu la croyance à ce dogme ; la théorie électro-magnétique de la lumière est venue, à son tour, accroître le scepticisme de plusieurs physiciens; il semble que le moment soit venu, pour l'optique, de se dégager des hypothèses sur la nature de la lumière, d'imiter la thermodynamique qui a, peu à peu, abandonné la théorie mécanique de la chaleur.

Nous nous efforçons, depuis plusieurs années, dans notre enseignement, de montrer que les découvertes les mieux établies de l'optique peuvent être exposées logiquement, sans qu'on ait à faire intervenir aucune hypothèse touchant la nature de la lumière ; cette tentative nous a amené à remanier assez profondément la forme de certains chapitres de cette partie de la phy-

sique; ce sont ces chapitres que nous demandons à la *Société scientifique* la permission de lui communiquer.

On ne trouvera, dans ces fragments, aucune vérité physique nouvelle; leur seule prétention est de montrer que l'on peut exposer les vérités connues touchant l'optique dans un ordre rationnel, conforme aux principes qui doivent aujourd'hui, du moins à notre avis, gouverner la physique; les lois de l'optique seront ainsi, selon un mot d'Ampère, rendues « indépendantes, tant des hypothèses dont leurs auteurs ont pu s'aider dans la recherche de ces formules, que de celles qui peuvent leur être substituées dans la suite ».

PREMIER FRAGMENT.

Le principe d'Huygens.

Le principe qui va nous occuper a été découvert par Huygens et exposé par lui dans le *Traité de la Lumière* qu'il a publié à La Haye en 1690 ; il l'a découvert en faisant l'*hypothèse nullement évidente et nullement certaine*, que la lumière consiste essentiellement en un mouvement très rapide des parties du corps éclairé, et en assimilant ce mouvement à celui qui, *non point par hypothèse, mais par vérité d'expérience,* constitue le son. Nous allons chercher à donner au principe d'Huygens une forme précise, tout en le dégageant de toute hypothèse sur la nature de la lumière.

Nous supposerons données les définitions générales de milieu *homogène* ou *hétérogène*, *isotrope* ou *anisotrope*.

A. *Principe d'Huygens pour un milieu homogène illimité.*

PREMIÈRE HYPOTHÈSE. — 1° Dans un milieu homogène, indéfini, isotrope ou anisotrope, une source lumineuse, de volume infiniment petit v, brille pendant un temps infiniment court à partir de l'instant t_0. A un instant t, postérieur à t_0, il n'y a aucun

point éclairé dans le milieu, sinon les points d'une couche très peu épaisse, distribuée sur une certaine surface fermée qui entoure le volume v.

2° La surface S varie avec l'époque t; aux époques $t, t', t'', \ldots$ correspondent des surfaces distinctes S, S', S'', ...; toutes ces surfaces sont directement homothétiques entre elles; le centre d'homothétie est un point M du volume v; entre les deux surfaces S' et S, correspondant respectivement aux époques t' et t, le rapport d'homothétie est

$$\frac{t' - t_0}{t - t_0}.$$

Définitions. — La surface S se nomme *surface de l'onde lumineuse à l'instant* t.

La surface Σ, qui correspond au cas où $t - t_0 = 1$, se nomme *surface d'onde* relative au point M et au milieu considéré.

Si le milieu est homogène, la surface d'onde sera identique de forme, grandeur et orientation pour tous les points M du milieu.

Cette surface peut être rencontrée en plus d'un point par une demi-droite issue du point M. Pour faire les figures, nous la supposerons rencontrée en un seul point.

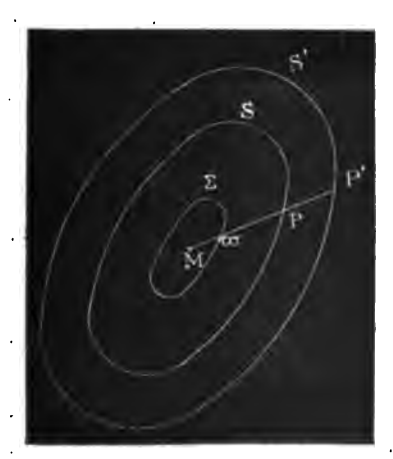


Fig. 1.

Étant donnée la surface d'onde Σ (fig. 1), relative au point M, et supposant que le point M brille un temps très court à l'instant t_0, on aura aisément la surface S de l'onde lumineuse à l'instant t. Cette surface sera homothétique de la surface Σ par rapport au point M, et le rapport d'homothétie sera $(t - t_0)$.

Soient S, S', les ondes lumineuses à l'instant t et à l'instant t'.

Une demi-droite, de direction donnée (dont les cosinus directeurs sont α, β, γ), rencontre ces surfaces respectivement aux points P, P', qui se correspondent par homothétie; elle rencontre la surface Σ au point correspondant ϖ.

On a

$$\frac{\overline{PP'}}{t'-t} = M\varpi.$$

Le point P se déplace donc sur la demi-droite MP d'un mouvement uniforme dont la vitesse est $M\varpi$. Cette vitesse est, par définition, la *vitesse de la lumière suivant le rayon* dont la direction est définie par les cosinus α, β, γ. Pour une même valeur de ces cosinus dans un milieu homogène, cette vitesse est indépendante du point M dont la lumière est issue. Elle est égale au rayon vecteur de la surface Σ, ayant pour cosinus directeurs α, β, γ.

Si la surface Σ est rencontrée en plusieurs points par une demi-droite issue du point M, il y a *plusieurs vitesses de la lumière suivant un rayon donné*; le nombre de ces vitesses est égal au nombre des points suivant lesquels la surface Σ est rencontrée par une demi-droite issue du point M. Dans le cas (toujours réalisé dans les milieux connus jusqu'ici) où le point M est un *centre* de la surface Σ, il est égal à la moitié du nombre des points en lesquels une droite menée par le point M rencontre la surface Σ. *Le nombre des vitesses de la lumière, suivant un rayon de direction donnée, est égal en général et au plus à la moitié de l'ordre de la surface d'onde (supposée algébrique).*

Prenons (fig. 2) un point P sur l'onde lumineuse S au temps t. Par ce point, menons une demi-normale à l'onde S. Soient λ, μ, ν, les cosinus directeurs de cette demi-normale. Elle rencontre en un point p l'onde lumineuse s à l'instant $(t+dt)$.

Considérons le rapport $\frac{\overline{Pp}}{dt}$. Nous allons voir qu'il a une valeur qui dépend de λ, μ, ν, mais ne dépend pas de t.

Prenons, en effet, les ondes S' et s', homothétiques des ondes S et s, le rapport d'homothétie étant $\frac{t'-t_0}{t-t_0}$; l'onde S' sera l'onde à l'instant t'; l'onde s' sera l'onde à l'instant $t'+dt'$, avec

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad dt' = \frac{t'-t_0}{t-t_0}\,dt.$$

Soient P′, p' les points homothétiques de P, p. La droite $P'p'$ aura pour cosinus directeurs λ, μ, ν et sera normale en P′ à la surface S′; on aura

$$(2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \overline{P'p'} = \frac{t' - t_0}{t - t_0} \overline{Pp}.$$

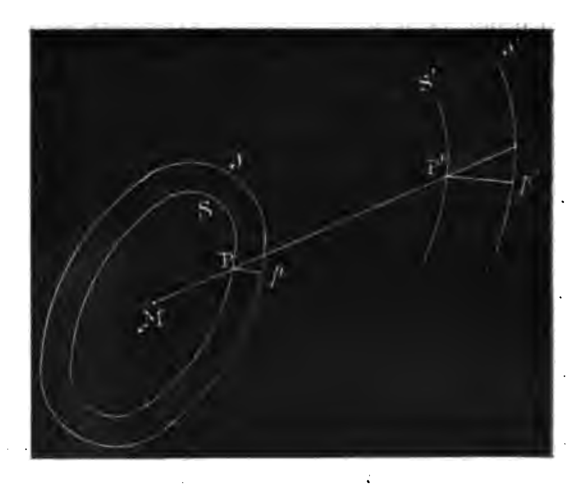


Fig. 2.

En vertu de (1) et (2), on aura

$$\frac{\overline{P'p'}}{dt'} = \frac{\overline{Pp}}{dt}.$$

Par définition, le rapport $\frac{\overline{Pp}}{dt}$ se nomme la *vitesse de la lumière selon la normale à l'onde*, dont les cosinus directeurs sont λ, μ, ν.

A une direction donnée (λ, μ, ν) de normale peuvent correspondre *plusieurs vitesses de la lumière selon la normale à l'onde* ainsi dirigée ; car si l'on considère une quelconque des surfaces S, par exemple la surface Σ, il peut y avoir sur cette surface plusieurs points où la normale extérieure ait pour cosinus directeurs λ, μ, ν. En ces points, le plan tangent sera normal à la demi-droite λ, μ, ν ; mais, inversement, si l'on considère tous les points

où le plan tangent est normal à la demi-droite λ, μ, ν, cette demi-droite ne sera pas, en chacun de ces points, normale *extérieure* à la surface Σ; dans le cas, toujours réalisé, où la surface Σ admet un centre, le nombre de ces points où (λ, μ, ν) est normale extérieure est égal au nombre de ces points où (λ, μ, ν) est normale intérieure; donc le nombre des points de la surface Σ où la demi-droite (λ, μ, ν) est normale extérieure est égal à la moitié du nombre des plans tangents normaux à (λ, μ, ν) que l'on peut lui mener ; *le nombre des vitesses de la lumière, suivant une normale à une onde de direction donnée, est égal en général et au plus à la moitié de la classe de la surface d'onde* Σ.

Dans les milieux isotropes, toutes les directions issues d'un même point M sont équivalentes; la surface d'onde se compose donc d'une ou plusieurs sphères (en réalité, une sphère) ayant pour centre le point M; dans ce cas, il est aisé de voir que la vitesse suivant le rayon et la vitesse suivant la normale à l'onde sont identiques; il n'en est plus de même dans les milieux anisotropes.

Il est aisé d'obtenir la valeur de la vitesse de la lumière suivant la demi-droite (λ, μ, ν) considérée comme normale à l'onde.

Soit Σ la surface d'onde relative au point M (fig. 3); soit σ une surface homothétique à Σ, le rapport d'homothétie étant $(1 + dt)$ et le centre d'homothétie étant en M; soit P un point où la normale extérieure à la surface Σ a pour cosinus directeurs (λ, μ, ν). La droite MP rencontre la surface σ en P'.

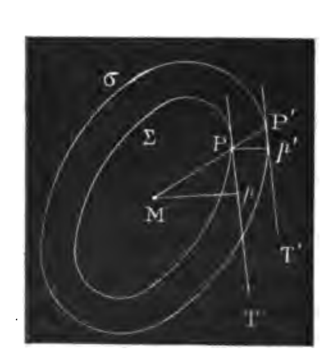


Fig. 3.

Soit T le plan tangent à la surface Σ en P; soit Mp la distance du point M à ce plan tangent; soit T' le plan tangent à la surface Σ en P'; soit Pp' la distance du point P à ce plan tangent. En négligeant un terme infiniment petit par rapport à sa valeur, la vitesse cherchée est représentée par $\frac{Pp'}{dt}$. Mais les deux trian-

gles $PP'p'$ et MPp sont évidemment semblables, en sorte que l'on a

$$Pp' = Mp \times \frac{PP'}{MP}.$$

D'autre part, la surface σ est homothétique de la surface Σ par rapport au point M, et le rapport d'homothétie est $(1 + dt)$. On a donc

$$\frac{PP'}{MP} = \frac{MP' - MP}{MP} = dt.$$

Par conséquent

$$\frac{Pp'}{dt} = Mp,$$

en sorte que Mp représente la vitesse cherchée; ce qui permet d'énoncer la règle suivante :

Règle. — *Pour trouver la vitesse de la lumière suivant une direction donnée, prise pour normale à l'onde, on construit la surface d'onde Σ relative à un point quelconque* M *du milieu ; on cherche sur cette surface Σ un point* P *où la normale extérieure ait la direction donnée; on mène le plan tangent en* P *à la surface Σ ; la distance du point* M *à ce plan tangent est la vitesse cherchée.*

Remarque. — Sur chaque direction issue d'un point O, portons une longueur égale à la vitesse de la lumière suivant cette direction prise comme normale à l'onde; les extrémités de ces longueurs auront pour lieu la *podaire* de la surface d'onde par rapport au point O.

Deuxième hypothèse. — Considérons maintenant des sources lumineuses formant une couche lumineuse très peu épaisse, distribuée sur une surface T. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point M de la surface T peuvent s'exprimer en fonction de deux variables arbitraires u, v :

$$\xi = \varphi(u, v),$$
$$\eta = \psi(u, v),$$
$$\zeta = \chi(u, v).$$

Nous dirons que u, v sont les coordonnées du point M sur la surface T.

Nous supposerons que chaque point M brille pendant un moment seulement, à partir du temps t_0; ce temps peut être variable d'un point M à l'autre; en d'autres termes, t_0 peut dépendre de (u, v) :

$$t_0 = t_0(u, v).$$

Si le point M (ξ, η, ζ ou u, v) brillait seul à l'instant $t_0(u, v)$, à l'instant t, les seuls points éclairés seraient sur une surface S. Pour construire celle-ci, nous prendrions d'abord la surface Σ, relative au point M; puis, en prenant ce point M pour centre d'homothétie et $(t - t_0)$ pour rapport d'homothétie, nous lui construirions une surface homothétique qui serait la surface S.

Comment déterminerions-nous l'équation de cette surface S?

Si la source lumineuse était à l'origine des coordonnées, la surface Σ serait représentée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

Lorsque la source lumineuse est en M (ξ, η, ζ), la surface Σ est représentée par l'équation

$$F(x - \xi, \quad y - \eta, \quad z - \zeta) = 0.$$

Soit (x', y', z') le point de la surface S homothétique du point (x, y, z) de la surface Σ.

On a

$$\begin{aligned} x' - \xi &= (t - t_0)(x - \xi), \\ y' - \eta &= (t - t_0)(y - \eta), \\ z' - \zeta &= (t - t_0)(z - \zeta). \end{aligned}$$

Les coordonnées x', y', z' vérifient donc l'équation

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad F\left(\frac{x' - \xi}{t - t_0}, \quad \frac{y' - \eta}{t - t_0}, \quad \frac{z' - \zeta}{t - t_0}\right) = 0.$$

C'est l'équation de la surface S. Comme ξ, η, ζ, t_0 sont des fonctions données de u, v, on voit que cette équation est une rela-

tion entre les coordonnées x', y', z' d'un point de la surface S (dorénavant nous supprimerons les accents), le temps t et les coordonnées u, v, du point M sur la surface S; nous l'écrirons

$$f(x, y, z, t, u, v) = 0.$$

Prenons toutes les surfaces S relatives aux divers points M de la surface T, mais à un même instant t; t sera alors une constante, et nous aurons une famille de surfaces dont l'équation renfermera deux paramètres variables arbitrairement. Ces surfaces admettront une enveloppe Θ, qui touchera chacune d'elles en un nombre limité de points. L'équation de cette enveloppe s'obtiendra, comme l'on sait, en éliminant les paramètres variables u, v entre les équations

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} f(x, y, z, t, u, v) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u} f(x, y, z, t, u, v) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v} f(x, y, z, t, u, v) = 0. \end{cases}$$

Ces préliminaires posés, la deuxième hypothèse d'Huygens peut s'énoncer de la manière suivante :

A l'instant t, *les seuls points éclairés sont infiniment voisins de la surface* Θ.

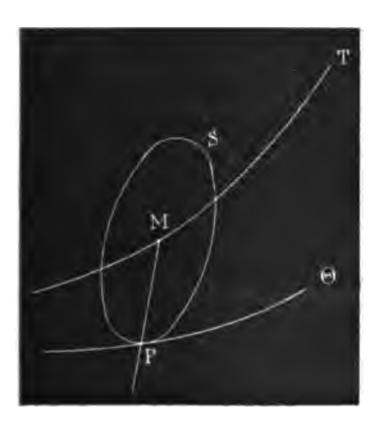


Fig. 4.

THÉORÈME.—*Soit* P (fig. 4) *un des points de contact de la surface* S, *relative au point* M, *avec l'enveloppe* Θ; *pour un même point* M, *le point* P *varie avec* t; *il se meut d'un mouvement uniforme sur une droite issue du point* M; *la vitesse de ce mouvement est égale à la vitesse de la lumière suivant le rayon de direction* MP.

Les coordonnées du point P vérifient les équations (4) où u, v ont les valeurs qui conviennent au point M, et t la valeur qui convient aux surfaces S et Θ. Remplaçons f par sa forme explicite (3). Posons :

$$(5) \quad \ldots \quad X = \frac{x - \xi}{t - t_0}, \quad Y = \frac{y - \eta}{t - t_0}, \quad Z = \frac{z - \zeta}{t - t_0}.$$

Les équations (4) deviendront :

$$(6) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} & F(X, Y, Z) = 0, \\ & \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \\ & \frac{\partial F}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0. \end{aligned} \right.$$

On a d'ailleurs, en vertu des égalités (5),

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{1}{t - t_0}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{x - \xi}{(t - t_0)^2}\frac{\partial t_0}{\partial u} = -\frac{1}{t - t_0}\left[\frac{\partial \xi}{\partial u} - X\frac{\partial t_0}{\partial u}\right],$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . .

Les égalités (6) deviennent alors, après suppression du facteur $\frac{1}{t - t_0}$, qui n'est pas nul,

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & F(X, Y, Z) = 0, \\ & \frac{\partial F}{\partial X}\left(\frac{\partial \xi}{\partial u} - X\frac{\partial t_0}{\partial u}\right) + \frac{\partial F}{\partial Y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - Y\frac{\partial t_0}{\partial u}\right) + \frac{\partial F}{\partial Z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} - Z\frac{\partial t_0}{\partial u}\right) = 0, \\ & \frac{\partial F}{\partial X}\left(\frac{\partial \xi}{\partial v} - X\frac{\partial t_0}{\partial v}\right) + \frac{\partial F}{\partial Y}\left(\frac{\partial \eta}{\partial v} - Y\frac{\partial t_0}{\partial v}\right) + \frac{\partial F}{\partial Z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial v} - Z\frac{\partial t_0}{\partial v}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces égalités (7) ont lieu entre X, Y, Z, u, v, mais t n'y figure pas ; elles déterminent donc X, Y, Z en fonctions de u, v, mais

ces fonctions ne dépendent pas de t. Les égalités (5) peuvent donc s'écrire :

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} x - \xi = X(u, v)(t - t_0), \\ y - \eta = Y(u, v)(t - t_0), \\ z - \zeta = Z(u, v)(t - t_0). \end{cases}$$

Le système (7) peut donner *plusieurs* systèmes de déterminations pour les inconnues $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$. Prenons *un* de ces systèmes, et envisageons les égalités (8) ; elles nous enseignent que le point $P(x, y, z)$ qui correspond à un point donné $M(u, v)$ varie avec t et qu'il est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme dont la vitesse a pour composantes $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$.

La première partie du théorème est ainsi démontrée. La seconde est alors évidente.

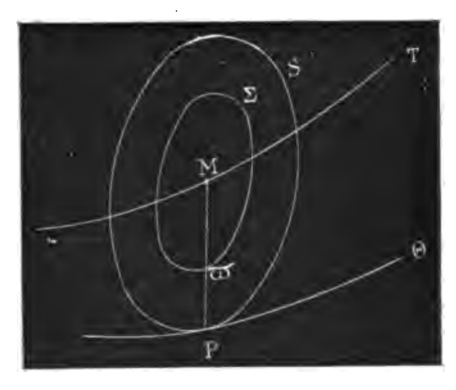


Fig. 5.

Considérons (fig. 5) la surface Σ relative au point M ; la surface S lui est homothétique par rapport au point M et le rapport d'homothétie est $(t - t_0)$. Considérons la droite *fixe* MP sur laquelle se meut le point P. Elle rencontre en ϖ la surface Σ et l'on a $\overline{MP} = \overline{M\varpi}\,(t - t_0)$. La vitesse du point P sur la droite MP est donc égale à $M\varpi$.

Définition. — *La droite* MP *se nomme direction de propagation de l'onde* Θ *au point* P. A un point M de la surface T correspondent, en général, plusieurs directions de propagation distinctes, car les équations (7) déterminent, en général, plusieurs systèmes de valeurs de $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ pour un système donné de valeurs de u, v.

En un même point P de l'espace, peuvent, à l'instant t, se croiser *plusieurs nappes* de la surface de l'onde Θ ; il y a alors, pour un même point P, *plusieurs directions de propagation* correspondant à des points M différents.

Remarque. — *Dans un milieu isotrope, la direction de propagation au point* P *est, en ce point, normale à la surface de l'onde* Θ.

En effet, dans ce cas, la surface S est une sphère ; MP, rayon de cette sphère, lui est normal en P et normal à la surface Θ qui touche la sphère S en ce point.

Théorème. — Étant données (fig. 6) la surface S et la surface Θ relatives à l'instant t ; puis la surface S' (relative au point M) et la surface Θ' relative S à l'instant $(t + dt)$; on élève en P une normale commune aux deux surfaces S et Θ ; la surface S' détermine sur cette normale un segment dN et la surface Θ' un segment δN. Nous allons voir que

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\delta N}{dt}.$$



Fig. 6.

Cherchons d'abord $\frac{dN}{dt}$.

Soient x, y, z les coordonnées du point P ; ces coordonnées vérifient l'équation de la surface S relative au point M (u, v) et à l'instant t :

$$(a) \quad \ldots\ldots \quad f(x, y, z, t, u, v) = 0.$$

L'extrémité du segment dN a pour coordonnées

$$x + \cos(N, x)\frac{dN}{dt}\,dt, \qquad y + \cos(N, y)\frac{dN}{dt}\,dt, \qquad z + \cos(N, z)\frac{dN}{dt}\,dt,$$

Ces coordonnées doivent vérifier l'équation de la surface S', qui est relative au *même* point M (u, v) et à l'instant $(t + dt)$; on a donc

$$f\left[x + \cos(N, x)\frac{dN}{dt}dt, \quad y + \cos(N, y)\frac{dN}{dt}dt,\right.$$
$$\left. z + \cos(N, z)\frac{dN}{dt}dt, \quad t + dt, \ u, \ v\right] = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$f(x, y, z, t, u, v)$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(N, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(N, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(N, z)\right]\frac{dN}{dt}dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0.$$

Moyennant l'égalité (a), celle-ci devient

$$(9) \qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(N, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(N, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(N, z)\right]\frac{dN}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Telle est l'égalité qui donne $\frac{dN}{dt}$.

Cherchons maintenant $\frac{\delta N}{dt}$.

Les coordonnées x, y, z du point P, jointes à la valeur t du temps, rendent compatibles en u, v les équations (4) :

$$(b) \quad \ldots \quad \begin{cases} f(x, y, z, t, u, v) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}f(x, y, z, t, u, v) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}f(x, y, z, t, u, v) = 0. \end{cases}$$

L'extrémité du segment δN a pour coordonnées

$$x + \cos(N, x)\frac{\delta N}{dt}dt, \quad y + \cos(N, y)\frac{\delta N}{dt}dt, \quad z + \cos(N, z)\frac{\delta N}{dt}dt.$$

Cette extrémité doit être sur la surface Θ' relative à l'instant $(t + dt)$; si donc on remplace x, y, z par ces valeurs, t par

$(t + dt)$, dans les équations (b), on doit obtenir des équations compatibles en u, v; elles seront évidemment vérifiées par un système de valeurs $(u + du,\ v + dv)$ infiniment voisin du système $(u,\ v)$ qui vérifie le système (b). Nous aurons :

$$f\left[x + \cos(\mathrm{N}, x)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\quad y + \cos(\mathrm{N}, y)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\right.$$
$$\left. z + \cos(\mathrm{N}, z)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\quad t + dt,\ u + du,\ v + dv\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial(u + du)}f\left[x + \cos(\mathrm{N}, x)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\quad y + \cos(\mathrm{N}, y)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\right.$$
$$\left. z + \cos(\mathrm{N}, z)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\quad t + dt,\ u + du,\ v + dv\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial(v + dv)}f\left[x + \cos(\mathrm{N}, x)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\quad y + \cos(\mathrm{N}, y)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\right.$$
$$\left. z + \cos(\mathrm{N}, z)\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt,\quad t + dt,\ u + du,\ v + dv\right] = 0.$$

La première de ces équations devient

$$f(x, y, z, t, u, v) + \frac{\partial}{\partial u}f(x, y, z, t, u, v)\,du + \frac{\partial}{\partial v}f(x, y, z, t, u, v)\,dv$$
$$+ \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\mathrm{N}, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\mathrm{N}, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(\mathrm{N}, z)\right]\frac{\delta\mathrm{N}}{dt}dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt = 0.$$

En vertu des équations (b), elle se réduit à

$$(10)\qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\mathrm{N}, x) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos(\mathrm{N}, y) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(\mathrm{N}, z)\right]\frac{\delta\mathrm{N}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Cette équation, comparée à l'équation (9), montre que l'on a

$$\frac{\delta\mathrm{N}}{dt} = \frac{d\mathrm{N}}{dt},$$

ce qui est le théorème énoncé.

Cette égalité peut s'écrire :

$$\delta N = \frac{dN}{dt} dt.$$

Or $\frac{dN}{dt}$ est ce que nous avons nommé *la vitesse de la lumière suivant la normale* N *à l'onde*. On peut donc énoncer le théorème suivant :

La distance δN *entre la surface* Θ *de l'onde lumineuse à l'instant* t *et la surface* Θ' *de l'onde lumineuse à l'instant* (t + dt) *s'obtient en multipliant le temps infiniment petit* dt *par la vitesse de la lumière suivant la normale* N *à l'onde.*

Problème. — *Étant donné la surface* Θ *de l'onde lumineuse au temps* t, *trouver la surface* Θ' *de l'onde lumineuse au temps* t', *postérieur à* t.

Soient P (fig. 7) un point de la surface de l'onde Θ et MP la direction de propagation en ce point; cette direction rencontre la surface Θ' en P'. $\overline{PP'}$ est égal, nous le savons, à la vitesse de propagation de la lumière suivant le rayon MP, multipliée par $(t' - t)$. Si donc nous dessinons une surface s, homothétique de la surface Σ, le centre d'homothétie étant en P et le rapport d'homothétie étant $(t' - t)$, cette surface passera en P'. Je dis qu'elle y touchera la surface Θ'.

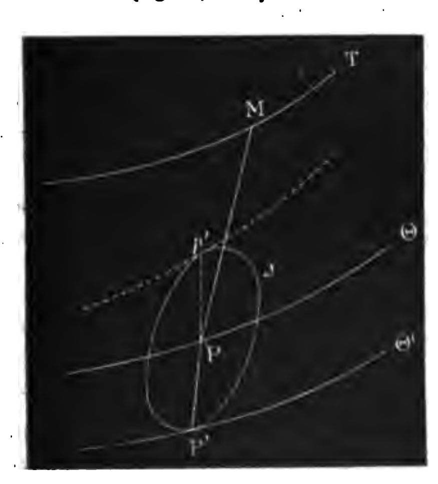


Fig. 7.

En effet, la surface Θ' touche en P' une surface S', homothétique de la surface Σ relative au point M, le centre d'homothétie étant M et le rapport d'homothétie étant $t' - t_0$. Dès lors, les

deux surfaces s et S′ seront homothétiques, le centre d'homothétie étant en P′ et le rapport d'homothétie étant $\frac{t'-t}{t'-t_0}$. Ces deux surfaces s et S′ ont donc, en P′, le même plan tangent, ce qui démontre le théorème énoncé.

Si donc, pour chaque point P *de la surface* Θ *de l'onde lumineuse à l'instant* t, *on construit la surface analogue à* s *et si l'on forme l'enveloppe de ces surfaces, la surface* Θ′ *de l'onde lumineuse à l'instant* t′ *sera l'*UNE DES NAPPES *de cette enveloppe.*

En général, cette enveloppe renfermera d'autres nappes, dites *parasites,* qui ne répondent pas au problème.

Comment distinguera-t-on les nappes à conserver des nappes parasites à rejeter?

Prenons une des nappes Θ′ qui doit être conservée; la droite PP′ prolonge, comme direction et sens, la direction de propagation MP au point P; prenons au contraire un point p' où la surface s relative au point P touche une onde parasite de l'enveloppe; la droite Pp' ne prolonge pas, en direction et sens, la direction de propagation MP au point P.

EXEMPLE. — Pour une source lumineuse très petite placée en un point M dans un milieu isotrope, la surface Θ au temps t est une sphère de centre M et de rayon $V(t - t_0)$, V étant la vitesse de la lumière; la surface Θ′ au temps t' est une sphère de même centre et de rayon $V(t' - t_0)$; la nappe parasite θ' est une sphère de même centre et de rayon $V(2t - t' - t_0)$.

REMARQUE. — La surface Θ′ de l'onde au temps t' se déduit de la surface Θ de l'onde lumineuse au temps t, comme si chaque point de celle-ci était une source de lumière brillant à l'instant t pendant un temps très court; le premier problème diffère seulement du second par la présence de nappes parasites qui doivent être conservées dans le second et supprimées dans le premier.

CONSÉQUENCE. — *Dans un milieu isotrope, la surface* Θ′ *de l'onde au temps* t′ *est une surface parallèle à la surface* Θ *de l'onde au temps* t; *la distance normale de ces deux surfaces est* $V(t' - t)$.

Généralisation de la construction précédente. — Supposons que l'on se donne, dans un milieu parcouru par une onde lumineuse, une surface LL'... qui ne coïncide pas avec une position de l'onde. Une nappe déterminée de l'onde lumineuse rencontrera la surface LL' ..., à l'instant t suivant la ligne L, à l'instant t' suivant la ligne L', à l'instant t'' suivant la ligne L'',... Supposons que l'on connaisse seulement la forme des lignes L, L', L'',... et les instants t, t', t'', ... où l'onde lumineuse a passé par ces lignes; proposons-nous de construire la surface d'onde à l'instant T. Prenons, pour fixer les idées



$$t < t' < T < t''.$$

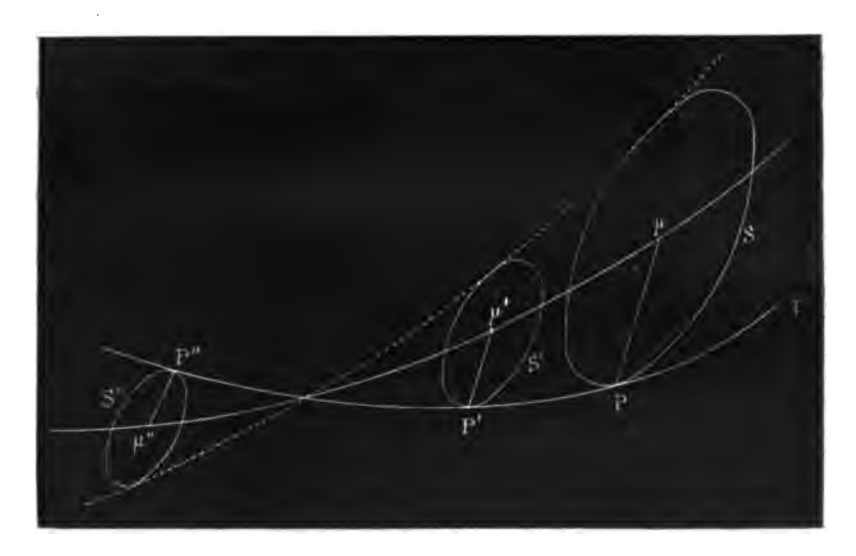


Fig. 8.

Soit μ (fig. 8) un point de la ligne L correspondant à un instant $t < T$. Prenons la surface Σ relative à ce point, et autour du point μ décrivons une surface S, homothétique directe de la surface Σ, le rapport d'homothétie étant $(T - t)$. Une démonstration semblable à celle que nous avons donnée il y a un instant montre que cette surface touchera en P la surface cherchée T de l'onde lumineuse à l'instant T; de plus, la direction μP prolongera la direction de propagation au point μ.

Soit maintenant μ'' un point de la ligne L'' qui correspond à un instant $t'' > T$. On considère la surface Σ relative au point μ'' et on prend l'homothétique *inverse* de cette surface par rapport au point μ'', le rapport d'homothétie étant $t'' - T$. Cette surface S'' touche en P'' la surface T cherchée; de plus la direction $\mu''P''$ est inverse de la direction de propagation au point P''.

Règle. — Pour tout point μ de la surface LL'L'', on prend la surface d'onde Σ et on construit une surface S homothétique de celle-là par rapport au point μ; le rapport d'homothétie est $(T - t)$; l'homothétie est directe si $T - t > 0$; elle est inverse si $T - t < 0$. On forme l'enveloppe de ces surfaces S. Parmi les nappes de cette enveloppe se trouve la surface cherchée de l'onde lumineuse à l'instant T.

Cette enveloppe renferme en outre, en général, des nappes parasites qu'il faut rejeter.

On reconnaîtra de la manière suivante une nappe qui doit être conservée :

On prend un point P sur cette nappe; on cherche le point μ dont il provient, et la valeur de t à laquelle correspond ce point μ. Si l'on a $T > t$, la direction μP doit prolonger la direction de propagation au point μ; si l'on a $T < t$, la direction μP doit être inverse de la direction de propagation au point μ.

Remarque. — La surface de l'onde lumineuse au temps T se détermine de la même manière que si les points μ, μ', μ'' étaient des points lumineux dont chacun ne brillerait qu'un moment aux instants t, t, t''. Seulement, dans ce cas, il n'y aurait pas de nappe parasite à supprimer.

Remarque. — Si la surface de l'onde lumineuse à l'instant t se compose de plusieurs nappes, une première nappe passera aux points μ, μ', μ'', ... aux instants t, t', t'', ...; une seconde nappe passera aux points $\mu, \mu'\ \mu''$, ... aux instants t_1, t'_1, t''_1. Pour ces instants, on répétera la même construction que précédemment.

B. Principe d'Huygens à la surface de séparation de deux milieux.

Supposons maintenant qu'au lieu de considérer la propagation de la lumière dans un milieu homogène indéfini, nous étudiions cette propagation dans un milieu formé de deux corps séparément homogènes 1 et 2, en contact le long d'une surface Ψ. Si, à un certain moment, des sources de lumière ont été allumées dans l'un de ces deux milieux ou dans tous les deux, à un instant postérieur *t* on verra de la lumière soit dans le milieu 1, soit dans le milieu 2, soit dans ces deux milieux à la fois ; c'est au sujet de cette lumière que nous allons faire les hypothèses suivantes :

Première hypothèse.—*Si les points qui ont engendré la lumière sont distribués soit dans un volume très petit, soit dans une couche très peu épaisse, recouvrant une certaine surface, et si chacun d'eux n'a brillé qu'un temps infiniment court à une époque quelconque d'ailleurs, à l'instant quelconque* t, *la lumière se trouve exclusivement en une couche très mince recouvrant une surface à une ou plusieurs nappes qui est la surface de l'onde lumineuse au temps* t.

Deuxième hypothèse. — *Considérons la partie de l'onde lumineuse au temps* t *qui est située dans le milieu 1. Elle coïncide avec la surface de l'onde qui serait engendrée au temps* t *dans un milieu identique au milieu 1, mais illimité, par une couche de points lumineux, réels ou fictifs, dont chacun brillerait un temps infiniment court à une époque déterminée. Nous ferons la même hypothèse sur la partie de l'onde lumineuse au temps* t *qui se trouve dans le milieu 2.*

Les points lumineux par lesquels peut être censée engendrée une partie qui N'EST PAS INFINIMENT VOISINE DE LA SURFACE Ψ *sont les mêmes à l'instant* t *et à l'instant* t + dt.

Conséquences. — 1° En tout point (même infiniment voisin de la surface Ψ) de l'onde lumineuse à l'instant *t*, il existe une

direction de propagation dont la définition est la même qu'en un milieu illimité;

2° Connaissant l'onde lumineuse à l'instant t, on peut se proposer de déterminer la surface de l'onde lumineuse à l'instant $(t + dt)$; d'après la deuxième hypothèse, pour toute partie de la surface de l'onde lumineuse qui n'est pas infiniment voisine de la surface Ψ, on peut appliquer la même construction que si le milieu dans lequel elle se trouve était indéfini. Prenons, par exemple, une portion de l'onde lumineuse au temps t située dans le milieu 1 : pour chaque point P_1 de cette onde construisons une surface S_1, homothétique de la surface d'onde Σ_1, le centre d'homothétie étant P_1 et le rapport d'homothétie étant dt; formons l'enveloppe de ces surfaces S_1; l'une des nappes de cette enveloppe fera partie de la surface de l'onde lumineuse à l'instant $(t + dt)$. On fera une construction semblable pour une portion de l'onde située dans le milieu 2.

Il restera, on le voit, pour résoudre le problème, à traiter de la détermination des parties de l'onde lumineuse à l'instant $(t + dt)$ qui sont infiniment voisines de la surface Ψ.

Définitions. — Considérons une portion Θ_1 de l'onde lumineuse à l'instant t, portion située dans le milieu 1. Soit P un point où elle rencontre la surface de séparation Ψ des deux milieux. En P, l'onde Θ_1 a une certaine direction de propagation MP; deux cas sont à distinguer :

1° La direction MP va du milieu 2 au milieu 1; l'onde Θ_1 est dite alors *onde émergente* dans le milieu 1;

2° La direction MP va du milieu 1 au milieu 2; l'onde Θ_1 est dite alors *onde incidente* dans le milieu 1.

Il pourrait arriver qu'en un certain point P, à l'instant t, il y ait une onde émergente soit dans le milieu 1, soit dans le milieu 2, soit même en tous deux, sans qu'aucune onde incidente provenant soit du milieu 1, soit du milieu 2, passe au point P à l'instant t. Une telle onde serait dite *émise* par le point P. Une surface Ψ sur laquelle existent des points P capables d'émettre des ondes est dite *lumineuse par elle-même*. Nous exclurons de

nos recherches le cas où la surface Ψ est lumineuse par elle-même.

La surface Ψ n'étant pas lumineuse par elle-même, en un point P de cette surface, il ne peut y avoir à l'instant *t* aucune onde émergente ni dans le milieu 2, ni dans le milieu 1, s'il n'y a pas, au même instant, en ce point, au moins une nappe d'onde incidente provenant soit du milieu 1, soit du milieu 2. Pour fixer les idées, supposons qu'au point P, à l'instant *t*, il arrive seulement une nappe de l'onde incidente Θ_1 provenant du milieu 1; s'il en arrivait plusieurs, soit dans le milieu 1, soit dans le milieu 2, soit dans ces deux milieux, on répéterait pour chacune d'elles ce que nous allons dire au sujet de l'onde Θ_1.

Troisième hypothèse. — Étant donnée la partie de l'onde incidente Θ_1, relative à l'instant *t*, qui est infiniment voisine du point P, voici comment on obtiendra, à l'instant $(t + dt)$, toutes les parties de l'onde lumineuse qui sont infiniment voisines du point P :

A. *Au moyen de l'onde* Θ_1, *on construira* (fig. 9) *l'onde* Θ_1' *relative à l'instant* $(t + dt)$, *comme si le milieu* 1 *était indéfini; cette onde* Θ_1' *aura une portion* $\varpi'P'$, *située à l'intérieur du milieu* 2, puisque la direction PP' de propagation en P est dirigée vers l'intérieur du milieu 2; *en retranchant de l'onde* Θ_1' *cette portion* $P'\varpi'$, *on aura l'onde incidente à l'instant* $(t + dt)$.

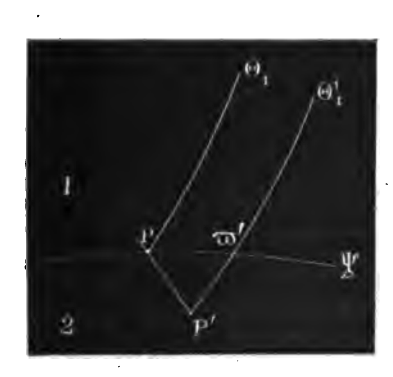


Fig. 9.

Il est aisé de voir que cette première partie de l'hypothèse est compatible avec la deuxième conséquence de la deuxième hypothèse.

B. *Prenons un point variable* Q (fig. 10), *situé sur la surface* Ψ, *entre* P *et* ϖ'. *L'onde incidente passe au point* Q *à*

l'instant (t + dτ), dτ *étant compris entre* 0 *et* dt. *Autour du point* Q *traçons une surface* σ_1, *homothéthique de* σ, *le rapport d'homothétie étant* (dt — dσ).

L'enveloppe de ces surfaces σ_1 *se composera de plusieurs nappes. Parmi ces nappes, il en est pour lesquelles la direction de propagation* Qq *est dirigée de la surface* Ψ *vers le milieu* 1; *ces nappes* θ_1 *fournissent les parties infiniment voisines du point* P, *de l'onde qui émerge dans le milieu* 1, *à l'instant* (t + dt). Les autres nappes sont des nappes parasites qui doivent être supprimées.

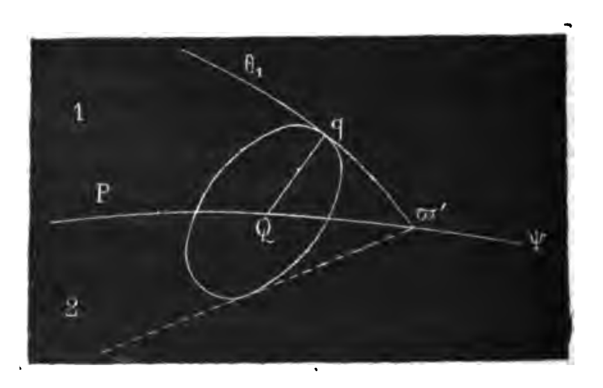


Fig. 10.

C. *On construira d'une manière analogue, en substituant la surface* Σ_2 *à la surface* Σ_1, *les parties infiniment voisines du point* P *de l'onde qui émerge à l'instant* (t + dt) *dans le milieu* 2.

Définitions. — Une onde *incidente* dans le milieu 1 fournit ainsi une onde émergente dans le milieu 1 et une onde émergente dans le milieu 2; la première est dite *onde réfléchie* et la seconde *onde réfractée.*

Remarques. — On fera sans peine les remarques suivantes :

Une nappe de l'onde incidente dans le milieu 1 fournit, dans le même milieu, un certain nombre de nappes de l'onde réfléchie; ce nombre est égal à la moitié de la classe de la surface d'onde Σ_1 du milieu 1. Elle fournit aussi un certain nombre de nappes

de l'onde réfractée dans le milieu 2; ce nombre est égal à la moitié de la classe de la surface d'onde Σ_2 du milieu 2.

Définitions. — Il peut arriver qu'une onde incidente dans le milieu 1 ne fournisse jamais d'onde réfractée dans le milieu 2 et que celui-ci ne fournisse jamais d'onde incidente; le milieu 2 est dit alors *complètement opaque.* Il peut arriver, en outre, qu'une onde incidente dans le milieu 1 ne fournisse jamais aucune onde réfléchie à la surface du milieu 2. Le milieu 2 est dit alors *complètement noir.*

Propriétés d'un écran complètement noir. — Imaginons qu'en un milieu 1 se trouve un corps complètement noir 2. Ayant l'onde lumineuse Θ à l'instant t, comment obtiendra-t-on l'onde lumineuse Θ' à l'instant $(t + dt)$? D'après notre deuxième hypothèse et la partie A de notre troisième hypothèse, on appliquera à l'onde Θ la même construction que si le milieu 1 était illimité; la surface obtenue Θ'_1 présentera (fig. 11) certaines parties infiniment petites $\varpi'P'$, $\varpi'_1P'_1$, intérieures au corps noir; on supprimera ces parties, et ce qui restera de la surface Θ'_1 après cette suppression sera l'onde Θ' à l'instant $(t + dt)$

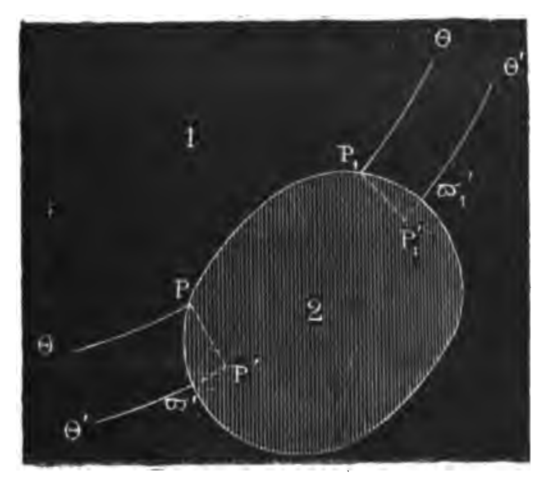


Fig. 11.

De cette construction, il est aisé de déduire la conclusion suivante :

Dans un milieu transparent 1 qui renferme un corps complètement noir 2, l'onde lumineuse à l'instant t est formée par certaines parties de la surface qui jouerait le rôle d'onde lumineuse au même instant si le corps 2 n'existait pas.

Construisons la surface Θ qui jouerait le rôle d'onde lumineuse à l'instant *t* si le corps 2 n'existait pas et cherchons à distinguer sur cette surface les parties qui doivent être conservées des parties qui doivent être supprimées pour obtenir l'onde, à l'instant *t*, dans un milieu qui renferme le corps 2.

Soient P un point de la surface Θ et MP la direction de propagation en ce point. Deux cas peuvent se présenter, selon que la direction MP rencontre ou ne rencontre pas le corps 2 avant de parvenir au point P.

1° *La direction de propagation* MP *ne rencontre pas le corps noir avant de parvenir au point* P.

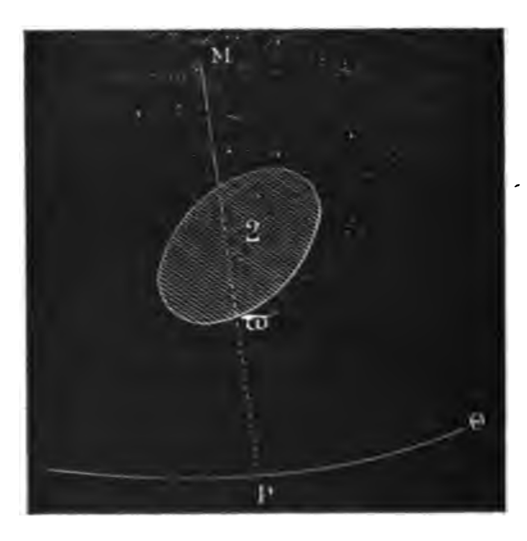


Fig. 12.

Il est alors aisé de voir que l'élément de l'onde lumineuse dans le milieu 1 supposé indéfini, qui est rencontré, à chaque instant,

par cette direction de propagation, ne deviendra jamais intérieur au corps noir et, par conséquent, ne sera jamais supprimé. Donc, dans ce cas, le point P appartient à une des parties de l'onde Θ qui doivent être conservées. *Dans ce cas, la lumière arrivera au point* P *au même instant que si le corps noir n'existait pas;*

2° *La direction de propagation* MP (fig. 12) *rencontre le corps noir avant de parvenir au point* P.

Dans ce cas, remontons la direction de propagation de P vers M, et soit ϖ le premier point où nous rencontrions le corps noir. En ce point la direction MP va certainement de l'intérieur du corps noir vers l'extérieur; s'il existait en ce point un élément d'onde lumineuse, cet élément aurait MP pour direction de propagation; il appartiendrait donc à une onde émergente; or un corps parfaitement noir ne peut fournir d'onde émergente; il n'y a donc pas d'onde lumineuse au point ϖ; dès lors, il ne peut y avoir eu aucun point de la direction ϖP; le point P appartient à l'une des parties de la surface Θ qui doivent être supprimées; *le point* P *ne reçoit aucune lumière.*

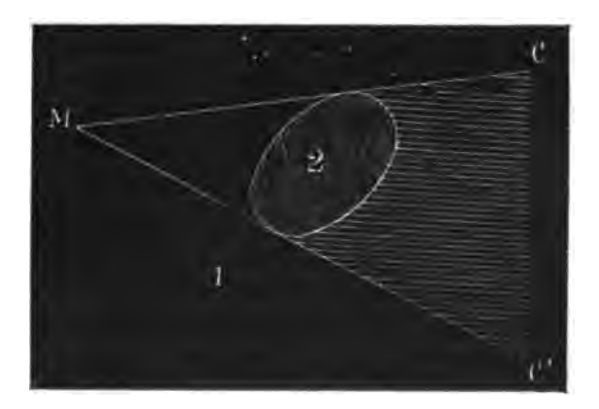


Fig. 13.

Supposons, en particulier, que la source de lumière se réduise à une source infiniment petite M (fig. 13), brillant pendant un temps infiniment court. Formons le cône de contour apparent du corps noir vu du point M. Soit MCC′ ce cône. Les points du

milieu 1 qui sont à l'intérieur de ce cône et au delà du corps noir par rapport au point M ne recevront pas de lumière; les autres points du milieu 1 seront éclairés au même instant que si le milieu 1 n'existait pas.

Quatrième hypothèse. — Nous avons considéré jusqu'ici des sources lumineuses dont chacune brillait seulement pendant un temps infiniment court. Nous allons maintenant considérer des sources lumineuses M distribuées sur une surface T, mais nous supposerons que chacune de ces sources $M(u, v)$ brille pendant un temps fini compris entre les instants $t_0(u, v)$ et $t_1(u, v)$.

Imaginons que chaque source $M(u, v)$ s'allume à l'instant $t_0(u, v)$ et brille pendant un temps infiniment court. Ces sources engendreront à l'instant t, dans le milieu *homogène* ou *hétérogène* considéré, une onde lumineuse $\Theta_0(t)$; supposons, pour fixer les idées, que cette onde soit formée *d'une seule nappe*.

A l'instant t, le milieu se divise en deux régions: l'une de ces régions, que nous nommerons *région postérieure* à l'onde $\Theta_0(t)$, est formée par tous les points où cette onde a passé à une époque antérieure à t; l'autre région, que nous nommerons *région antérieure* à l'onde $\Theta_0(t)$, est formée par tous les points où l'onde n'a pas passé au temps t. En un point de l'onde $\Theta_0(t)$, la direction de propagation traverse la surface en passant de la région postérieure à la région antérieure.

Imaginons, de même, que chaque source $M(u, v)$ s'allume à l'instant $t_1(u, v)$ et brille pendant un temps infiniment court. Ces sources engendreront à l'instant t, dans le milieu considéré, une onde lumineuse $\Theta_1(t)$; supposons encore, pour fixer les idées, que cette onde soit formée d'une seule nappe; définissons, par rapport à cette onde, la région antérieure et la région postérieure de l'espace, comme nous l'avons fait pour l'onde $\Theta_0(t)$.

Cela posé, notre hypothèse s'énoncera de la manière suivante :

A l'instant t, *il n'y a assurément aucune lumière au point* P, *à moins que ce point ne soit à la fois dans la région postérieure à la surface* $\Theta(t)$ *et dans la région antérieure à la surface* $\Theta_1(t)$.

Il peut arriver que les surfaces $\Theta_0(t)$, $\Theta_1(t)$, soient formées

de plusieurs nappes ; à chaque nappe de la surface $\Theta_0(t)$, on fera correspondre une nappe de la surface $\Theta_0(t)$ de la manière suivante :

Soit $\tau(u, v, \lambda)$ une fonction continue de u, v, croissant d'une manière continue lorsque λ varie de λ_0 à λ_1, se réduisant à $t_0(u, v)$ pour $\lambda = \lambda_0$ et à $t_1(u, v)$ pour $\lambda = \lambda_1$.

Imaginons que chaque point M (u, v) de la surface T s'allume à l'instant $\tau_0(u, v, \lambda)$ et brille pendant un temps infiniment court; construisons l'onde lumineuse à l'instant t ; ce sera une surface $\Theta(\lambda, t)$, variable d'une manière continue avec λ, se réduisant à la surface $\Theta_0(t)$ pour $\lambda = \lambda_0$ et à la surface $\Theta_1(t)$ pour $\lambda = \lambda_1$. Nous dirons qu'une nappe de la surface $\Theta_1(t)$ correspond à une nappe de la surface $\Theta_0(t)$, si ces deux nappes sont les deux positions extrêmes d'une même nappe de la surface $\Theta(\lambda, T)$.

Cela posé, nous pourrons, pour chaque nappe de la surface $\Theta_0(t)$ et pour chaque nappe de la surface $\Theta_1(t)$, distinguer une région antérieure de l'espace et une région postérieure ; l'hypothèse précédente se généralisera alors de la manière suivante :

A l'instant t, *il n'y a assurément aucune lumière au point* P, *à moins que ce point ne soit à la fois dans la région postérieure à l'une des nappes de la surface* $\Theta_0(t)$ *et dans la région antérieure à la nappe correspondante de la surface* $\Theta_1(t)$.

Exemple. — Imaginons une source de dimensions très petites brillant entre les instants t_0 et t_1, dans un milieu isotrope, où la surface d'onde est une sphère de rayon V. A l'instant t, il n'y aura pas de lumière, sauf aux points qui sont compris entre deux sphères concentriques, l'une de rayon $V(t - t_0)$, l'autre de rayon $V(t - t_1)$.

Conséquence. — Supposons qu'une source lumineuse de dimensions très petites, dont M est un point, brille de l'instant t_0 à l'instant t_1 dans un milieu où se trouve un corps noir 2. Il est aisé de voir que les points qui sont situés à l'intérieur du cône de contour apparent du corps 2 vu du point M, et au delà du corps 2 par rapport au point M, seront antérieurs, quel que

soit t, aux ondes $\Theta_0(t)$, $\Theta_1(t)$. *Ces points seront donc toujours dans l'ombre*; le point M ne sera jamais vu d'aucun de ces points. Cette proposition est le principe de la théorie géométrique des ombres; elle constitue le *principe dit de la propagation rectiligne de la lumière.*

Plus généralement, imaginons qu'une source de lumière soit formée de points lumineux qui s'allument *tous* au même instant t_0 et s'éteignent *tous* au même instant t_1; imaginons que cette source brille dans un milieu illimité; construisons les ondes $\Theta_0(t)$, $\Theta_1(t)$. L'onde $\Theta_0(t)$ (fig. 14) est l'enveloppe de la surface S_0, homothétique de la surface d'onde par rapport au point M, le rapport d'homothétie étant $t - t_0$; l'onde $\Theta_1(t)$ est l'enveloppe de la surface S_1, homothétique de la surface d'onde par rapport au point M, le rapport d'homothétie étant $t - t_1$; on en conclut sans peine que la surface $\Theta_1(t)$ coïncide avec la surface $\Theta_0(t')$, où $t' = t - (t_1 - t_0)$. Dès lors, si MP_0 est la direction de propagation au point P_0 de l'onde $\Theta_0(t)$, cette droite rencontre la surface $\Theta_1(t)$ en un point P_1 et MP_1 est la direction de propagation au point P_1 de l'onde $\Theta_1(t)$. Cela nous permet de parler sans ambiguïté de direction de propagation en un point P de l'espace, en entendant par là la direction de propagation qu'a, en ce point, l'onde $\Theta_0(t)$ à l'instant t où elle passe en ce point.

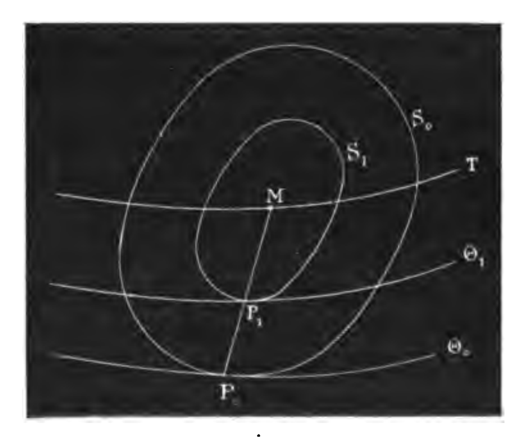


Fig. 14.

Plaçons maintenant dans l'espace un corps parfaitement noir Σ. Soit P un point de l'espace dont la direction de propagation MP rencontre le corps noir entre les points M et P. En ce point il n'y aura jamais de lumière.

Si l'onde $\Theta_0(t)$ est formée de plusieurs nappes, à un point P de l'espace correspondront plusieurs directions de propagation MP, M'P; pour qu'il n'y ait jamais de lumière au point P, il faut et il suffit que toutes ces directions rencontrent le corps noir entre leur origine et le point P.

Ces conséquences montrent que les *directions de propagation* jouent le rôle de *rayons de lumière.*

Nous laissons à nos lecteurs le soin d'appliquer ces généralités aux milieux isotropes, aux milieux biréfringents uniaxes et aux milieux biréfringents biaxes.

DU DIAGNOSTIC DU CARCINOME

AU POINT DE VUE HISTOLOGIQUE

PAR

M. le Dr W. MEESSEN.

Le diagnostic du carcinome, si facile lorsqu'il s'agit d'une tumeur typique, peut, dans certains cas, qui malheureusement ne sont pas rares, présenter de sérieuses difficultés.

Jean Müller, le père de la physiologie moderne, n'a pu donner qu'une définition clinique du carcinome, et ce n'est que depuis les remarquables travaux de Virchow, de Thiersch, et surtout de Waldeyer que la notion du carcinome est devenue une notion histologique parfaitement déterminée; en d'autres termes, que nous possédons du carcinome une notion scientifique tout à fait précise. Il en résulte qu'en dehors de toute observation clinique, l'anatomie pathologique est à même de résoudre la question de savoir si, oui ou non, un néoplasme est de nature cancéreuse, ce qui a son importance : les signes cliniques ne se développent avec leur caractère manifeste que lorsque le mal a pris de l'extension, tandis que le microscope permet, dès le début, un diagnostic rapide et sûr. Je ne rappellerai ici que le carcinome du col de la matrice à son début, dont l'invasion est si insidieuse et le diagnostic clinique si difficile.

Le carcinome peut donc être reconnu au mycroscope; mais avant que la tumeur puisse être soumise à l'examen microscopique, elle doit subir différentes manipulations. Ici aucun soin n'est inutile, et la plus grande minutie seule peut amener un résultat

satisfaisant. Il faut des soins pour le durcissement, pour la confection de coupes, pour la coloration et le montage de celles-ci. Les coupes d'une certaine dimension sont préférables, mais, pour avoir une image nette, elles doivent être aussi minces que possible ; c'est pourquoi l'enrobage à la paraffine me semble préférable à l'enrobage à la celluloïdine. Pour la coloration, j'emploie habituellement le carmin aluné de Grenacher, qui colore de la façon la plus nette et la plus discrète, laisse le tissu conjonctif incolore et fait ressortir énergiquement les noyaux des cellules. La double coloration me semble inutile; elle nuit souvent à la netteté de l'image. En effet, si on emploie le picro-lithion-carmin de Orth, ou le picro-carmin de Ranvier, pour obtenir une coloration des noyaux, il faut laver les préparations au moyen d'une solution alcoolique d'acide chlorhydrique très dilué; or, l'acide chlorhydrique fait gonfler le tissu conjonctif, de telle sorte que la préparation s'altère plus ou moins. Quant au montage des coupes, l'usage est aujourd'hui, dans la presque totalité des laboratoires, de conserver les coupes dans le baume du Canada, et, comme en général le microscope est muni du condensateur d'Abbe, il en résulte que c'est *l'image de couleur* que l'on voit.

Beaucoup de petits détails échappent de la sorte, et peut-être est-il préférable de faire apparaître *l'image de structure* en choisissant un liquide moins réfringent, comme par exemple l'acétate de potasse à 50 °/₀, qui, il est vrai, ne peut pas être employé pour les préparations colorées à l'hématoxyline. De plus, il faut, autant que possible, pour les observations histologiques, ne pas se servir du condensateur; on y parvient, si l'on ne veut pas l'enlever du microscope, en donnant au diaphragme iris la plus petite ouverture. De cette façon il sera possible de déterminer exactement la forme cellulaire et de voir les derniers détails, comme, par exemple, les fines dentelures au moyen desquelles les cellules s'engrènent entre elles.

Nous entendons par carcinome, le carcinome dans le sens de Waldeyer, c'est-à-dire un néoplasme typique qui n'a pas d'analogue dans l'histologie normale et qui se développe aux dépens du tissu épithélial, soit de revêtement, soit glandulaire avec

invasion de ces éléments épithéliaux dans le tissu conjonctif sous-jacent, qui se constitue en alvéole.

D'après cette définition, il n'y a donc pas de limite de démarcation entre l'épithélioma et les variétés de carcinome; d'autre part, la définition sépare nettement le carcinome des hypertrophies épithéliales, comme on les rencontre, par exemple, dans les cas de pachydermie du larynx (Virchow), où l'épithélium, tout en se développant avec abondance, respecte toujours les limites tracées par la membrane basale.

D'après la définition, finalement, le carcinome se développe aux dépens de l'élément épithélial; toutefois, cela ne veut pas dire que le caractère épithélial se transmet intégralement aux cellules-filles; au contraire, ce caractère se perd souvent et l'on voit les cellules manifester la tendance à retourner au type embryonnaire et prendre un caractère plus ou moins sarcomateux. Dans d'autres cas, il est vrai, la différenciation épithéliale se transmet strictement aux descendants; exemple : le cancroïde, le *Plattenepithelkrebs* des Allemands. Leur tissu conjonctif se forme toujours aux dépens du tissu conjonctif préexistant; mais souvent, lorsque l'infiltration carcinomateuse est très rapide, les cellules épithéliales s'infiltrent dans les couches plus profondes, entre les cellules musculaires, ce qui, dans les cas douteux, est de la plus haute importance pour assurer le diagnostic du carcinome.

Dans les cas de carcinome de la peau, ce sont surtout les glandes sébacées qui doivent attirer notre attention. C'est souvent ici que débute le néoplasme, parfois même sans aucune perturbation dans l'arrangement de la couche épithéliale. J'en montrerai un exemple. C'est une tumeur, qui a pris naissance au dos de la main. Après une première excision, récidive rapide; la couche épithéliale n'a pour ainsi dire pas subi d'altération, mais la glande sébacée a pris un développement anormal, développement qui, dans certains cas, peut prendre des formes monstrueuses : la structure de la glande est altérée et la couche épithéliale prolifère rapidement, témoins les nombreuses figures caryomitotiques.

Les difficultés qui se rencontrent dans le diagnostic du carci-

nome résultent, d'une part, du tissu de sustentation; d'autre part, du contenu alvéolaire lui-même.

Il est en effet des carcinomes où, par suite d'un travail d'inflammation secondaire, le tissu conjonctif subit une infiltration leucocytique, de telle sorte que le carcinome simule, à première vue, un sarcome à petites cellules rondes avec cellule géante : ici ce n'est que l'étude consciençieuse de tous les détails qui peut fixer le diagnostic. D'autres fois, l'évolution du carcinome est tellement rapide, que le tissu conjonctif n'a pas le temps de se former, et l'on ne rencontre que du tissu de granulation. C'est le *carcinoma granulosum*.

En second lieu, la structure du contenu alvéolaire peut prêter à la confusion avec l'adénome. Ici il faut citer les carcinomes du col de la matrice, où il dépend souvent, comme le fait remarquer Ziegler (*), de l'appréciation de chacun de décider si telle ou telle altération doit être rangée du côté des adénomes ou des carcinomes.

Au point de vue pratique, la question est fort importante, et une erreur peut devenir impardonnable. Dans un travail publié l'année passée par M. le Dr Dorff « *De l'extirpation de la matrice dans les cas de cancer utérin* », l'auteur conseille l'extirpation totale de l'organe malade dès que la tumeur est constatée. Plus on intervient rapidement, moins il y a de crainte de récidive. Or, au début, malgré tous les signes cliniques, que l'auteur décrit avec beaucoup de précision, il n'existe comme diagnostic précis que l'examen microscopique. La statistique relative à l'extirpation de l'utérus n'est pas absolument favorable, et s'il n'y avait que 1 °/o d'insuccès, il ne serait pas permis de faire l'opération dans un cas douteux : ici il faut la certitude absolue, et ce qui fait pencher la balance du côté du carcinome, ou plus exactement vers l'adénocarcinome, c'est la présence de tractus de fibrilles musculaires lisses dans le tissu connectif des alvéoles, en d'autres termes, la constatation du *myocarcinome*.

(*) *Lehrbuch der path. Anat.*, t. I, p. 335 (Iéna, 1892).

Une autre variété de tumeur, qui peut prêter à la confusion avec le carcinome, c'est le cylindrome de Billroth, qui appartient au groupe des sarcomes. Si le carcinome se propage le long des voies lymphatiques, et que le moindre débris du contenu alvéolaire peut, en suivant ces voies, déterminer dans des organes éloignés des tumeurs métastatiques, le sarcome est une tumeur qui se développe de préférence autour des vaisseaux sanguins. Une préparation le montrera nettement. Aux dépens de l'endothélium capillaire, il s'est formé des cellules constituant un semblant de contenu alvéolaire. Ces différents groupes de cellules sarcomateuses sont séparées les unes des autres par du tissu conjonctif simulant l'alvéole, mais, disons-le de suite, cette alvéole n'est qu'une alvéole apparente : au moyen du pinceau on ne peut pas en vider le contenu cellulaire ; les cellules sont fixées les unes aux autres par du tissu conjonctif et, de plus, l'origine des cellules sarcomateuses, aux dépens de l'endothélium des vaisseaux, ne laisse aucun doute sur la vraie signification de la tumeur.

ANATOMIE

DES

ORGANES CILIÉS DES HIRUDINÉES

DU GENRE DES GLOSSIPHONIDES

PAR

H. BOLSIUS, S. J.,
Professeur au Collège de la Compagnie de Jésus
à Oudenbosch (Pays-Bas).

INTRODUCTION.

Nos recherches ont porté sur plusieurs représentants des Hirudinées dites *Rhynchobdellides*. Toutes ces espèces sont indigènes : 1° *Glossiphonia sexoculata* (sive *complanata*); 2° *Glossiphonia bioculata; 3° Glossiphonia hyalina; 4° Glossiphonia (Hemiclepsis) marginata* ; 5° *Glossiphonia (Hemiclepsis) tessulata.*

Le sujet de notre travail est la formation que les auteurs nomment, depuis Leydig [2], l'*entonnoir des organes segmentaires.*

Dans notre publication sur le genre *Nephelis,* nous avions adopté le nom d'*organes ciliés.* Quoique ce nom soit rejeté par Bourne, Leuckart, Graf et d'autres, nous le conserverons néanmoins pour le genre *Glossiphonia* qui nous occupe actuellement.

La raison pour laquelle ces auteurs rejettent ce nom et les appellent *entonnoirs* est que, d'après eux, ces formations sont en relation avec l'extrémité des organes segmentaires ; la raison qui nous pousse à garder celui d'organes ciliés est que nos recherches ne nous révèlent pas cette connection, ou plutôt nous montrent la séparation des deux organes.

Nous espérons que, cette fois du moins, les lecteurs se persuaderont que l'objet qui nous occupe, et celui que d'autres indiquent sous le nom d' « entonnoir », sont de tous points un *seul et même objet*, mais compris *d'une façon différente* (*).

Nous n'insisterons pas sur nos méthodes de préparation; nous les avons déjà exposées ailleurs (**) : dissociations, macérations, fixation des individus entiers, colorations habituellement en bloc, sections microtomiques des animaux entiers pour pouvoir étudier les différentes formations *in situ*, non dérangées par les manipulations de ces productions si délicates.

Pour quelques espèces, nous avons pu nous servir d'individus d'âges très différents; cette circonstance jettera quelque lumière, particulièrement sur l'ampoule ou la *cavité annexe* aux organes ciliés, et tout spécialement sur son *contenu*.

BIBLIOGRAPHIE

(*se rapportant spécialement aux* GLOSSIPHONIDES.)

1. FR. LEYDIG, *Berichte v. d. Kön. Anstalt zu Würzburg*, 1849.
2. FR. LEYDIG, *Archiv f. Anat. u. Physiol.*, 1852.
3. FR. LEYDIG, *Zeitschr. f. wiss. Zool.*, 1854.
4. Fr. LEYDIG, *Histol. d. Mensch. u. d. Thiere*, 1857.
5. A.-G. BOURNE, *Quart. Journ. of Micr. Sc.*, 1880.
6. A.-G. BOURNE, *Quart. Journ. of Micr. Sc.*, 1884.
7. A.-G. BOURNE, *Quart. Journ. of Micr. Sc.*, 1893.
8. C.-K. HOFFMANN, *Nat. Verhand. d. Holl. Maatsch. d. Wetensch.*, 1880.
9. O. SCHULTZE, *Arch. f. mikr. Anat.*, 1883.
10. FR. VEJDOVSKY, *Sitzungsb. d. Böm. Gesell. Prag.*, 1883.
11. C. WHITMANN, *Festschr. z. 70 Geburtst. R. Leuckarts*, 1892.
12. ARN. GRAF, *Jenaische Zeitschr. f. Naturwiss.*, 1893.
13. R. LEUCKART, *Berichte üb. d. Verh. d. Kön. Sächs. Ges. d. Wiss. — Math.-Phys. Classe*, 1893.

(*) Quand on lit les travaux indiqués ci-après de Bourne [7] et de Leuckart [13], on est tenté de croire que nous avons *nié l'existence* de ce que les auteurs appellent « l'entonnoir ». Nous n'avons jamais nié l'existence des formations qui portent ce nom, mais seulement leur *relation* avec l'organe segmentaire, et par suite l'exactitude du nom d'*entonnoir*, auquel nous avons substitué, pour les Hirudinées, celui d'*organe cilié*.

(**) Voir : *La Cellule*, 1889, pp. 374-376; — *Ibid.*, 1891, pp. 5-6; — *Ibid.*, 1891, p. 296.

Autres ouvrages consultés.

FR. LEYDIG, *Archiv für mikr. Anatomie*, 1865.
C. GEGENBAUR, *Manuel d'anat. comp.*, 1870 (éd. fr., 1874).
C. GEGENBAUR, *Grandriss der vergleich. Anat.*, 1878.
C. WHITMANN, *Quart. Journ. of Micr. Sc. — The Embryology of Clepsine*, 1878.
A. LANG, *Mittheil. d. zool. Stat. Neapel*, 1881.
H. BOLSIUS, S. J., *La Cellule*, 1889.
H. BOLSIUS, S. J., *La Cellule*, 1891.
H. BOLSIUS, S. J., *Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles*, 1891.
H. BOLSIUS, S. J., *La Cellule*, 1891.

APERÇU DES DONNÉES ANTÉRIEURES.

Nous suivrons l'ordre chronologique.

1848. L'organe qui nous occupe est indiqué, pour la première fois, par v. Siebold, dans une *Nephelis*. La description est sommaire; aucun nom spécial ne lui est imposé. L'auteur ne nous renseigne ni sur les relations ni sur les fonctions de l'organe.

1849. Fr. Leydig [1] annonce avoir retrouvé ce même organe dans la *Nephelis*, et découvert un organe analogue dans la *Clepsine* (*Glossiphonie*). Bientôt après [2, 3], l'auteur affirme que ces productions ne sont pas des organes indépendants, mais les *entonnoirs* des organes segmentaires.

1857-1865. Quoique dans son *Manuel* [4] Leydig ait signalé des *entonnoirs* à l'extrémité des organes segmentaires de toutes les Hirudinées, plus tard il contredit cette assertion pour l'*Hirudo*, etc., mais il la maintient pour la *Nephelis* et la *Clepsine*.

Il n'est pas sans intérêt de reproduire les figures que Fr. Leydig a publiées sur ces organes des Glossiphonies. Nous les donnons dans notre planche III, figures 20 et 21. La première est de 1849 [1], la deuxième est de 1857 [4].

1870. Dans son *Manuel d'anatomie comparée*, C. Gegen-

baur (*) défend les idées de Leydig. Seulement ses indications sont très peu développées, sans figures à l'appui; et dans la seconde édition allemande, revue et corrigée (1878), il est moins explicite encore.

1878. Dans son mémoire *The Embryology of Clepsine*, C. Whitmann se prononce aussi pour la nature infundibulaire de ces formations dans les *Glossiphonies*, existant déjà dans l'embryon et persistant dans l'adulte.

1880. C.-K. Hoffmann [8] ne cite, à propos de l'*entonnoir*, que la seule *Clepsine* (*Glossiphonia*) *complanata*. Il est d'un autre avis que Whitmann, car dans les embryons il ne trouve jamais les *entonnoirs*. Chez les adultes, Hoffmann les découvre aisément, mais avec un nouveau détail, passé inaperçu jusqu'alors : c'est la *cavité annexe*.

Nous donnons les figures de Hoffmann dans nos figures 22, 23, 24. La première a rapport à l'organe cilié proprement dit, la seconde à cet organe en relation avec la cavité annexe, et la troisième aux éléments contenus dans cette cavité.

En cette même année, A.-G. Bourne [5] publia son premier travail sur la structure des *nephridia* chez la sangsue : disons seulement qu'à cette époque Bourne ne trouvait pas d'*entonnoir* à l'organe segmentaire de la sangsue médicinale.

1881. Arn. Lang (**), divisant nettement les Hirudinées en deux groupes, les *Gnathobdellides* et les *Rhynchobdellides*, dit que les dernières possèdent toutes des organes segmentaires munis d'un *entonnoir*, tandis que *la plupart* des premières sont dépourvues d'*entonnoir*. Malheureusement l'auteur ne précise pas quelles espèces font exception.

1883. Dans son travail [9], qui ne s'occupe que secondairement des *entonnoirs*, Osc. Schultze croit devoir constater néanmoins que non seulement les *Hirudinides* examinées par lui, mais encore la *Glossiphonide* dont il s'est servi (*Clepsine complanata* = *Glossiphonia compl.* sive *sexoculata*), sont toutes dépour-

---

(*) C. Gegenbaur, *Manuel d'anat. comp.* Édit. franç. de C. Vogt, 1874.

(**) Arn. Lang, *Mittheil. d. zool. Stat. Neapel*, 1881.

vues d'*entonnoir* à l'extrémité de l'organe segmentaire. Il n'y a que la *Gloss. bioculata* chez laquelle il croit en avoir constaté la présence.

1883. Fr. Vejdovsky [10] nie absolument l'existence d'*entonnoirs* dans la *Nephelis vulgaris*, la *Glossiphonia sexoculata* et la *Glossiphonia (Hemiclepsis) marginata.*

1884. A.-G. Bourne, poursuivant ses recherches sur les Hirudinées, publia un mémoire devenu assez fameux [6], dans lequel une large part est faite à l'étude des organes segmentaires et de leurs *entonnoirs*. Ces nouvelles recherches ont conduit Bourne à la conclusion que non seulement les *Rhynchobdellides* sont en possession d'*entonnoirs* placés à l'extrémité interne des organes segmentaires, mais aussi les *Gnathobdellides*, chez lesquelles il n'avait rien trouvé de semblable quatre ans auparavant.

Les figures du mémoire de Bourne étant ce qu'il y a de plus commode pour bien saisir ses idées, nous en empruntons deux pour notre planche. La figure 26 représente deux *entonnoirs* avec leur dilatation et leur point d'union avec les organes segmentaires, tels que Bourne croit les trouver chez la *Clepsine* (*Glossiphonide*). L'autre figure (fig. 25), ayant trait à une espèce que nous n'avons pas à examiner pour le moment, servira tantôt pour mieux préciser quelques détails des idées de Bourne.

1885. Incidemment, Nussbaum (*) mentionne aussi les *entonnoirs* des *Glossiphonides*, qu'il trouve faciles à observer chez la *Clepsine* (*Glossiph.*) *complanata;* il déclare s'étonner beaucoup de ce que Osc. Schultze n'ait pas pu les voir chez cette espèce.

1891. Dans notre second mémoire (**), nous avions attribué à Fr. Vejdovsky l'idée que *peut-être*, à l'âge embryonnaire, il y aurait un entonnoir à l'organe segmentaire chez la *Clepsine*. Le professeur de Prague a bien voulu nous écrire pour nous tirer de cette erreur. Notre troisième mémoire (***) renferme un

(*) M. Nussbaum, *Archives slaves de Biol.*, 1885.
(**) H. Bolsius, S. J., *La Cellule*, 1890.
(***) H. Bolsius, S. J., *La Cellule*, 1892.

passage de la lettre dans laquelle M. Vejdovsky précise clairement ses idées; elles sont pour la majeure partie ce que nous avons énoncé comme étant aussi le résultat de nos recherches. Voici ses paroles : « ..... quant aux entonnoirs ciliés, je me hâte » de vous communiquer que, dans les *nephridia* des Rhynchob- » dellides, ils font complètement défaut, même dans les stades » très jeunes. Dans les embryons de forme ovoïde, on ne trouve » que des *Trichterzellen*, mais nullement des *entonnoirs* (*Trich-* » *ter*, *Nephridiostomen*). »

1892. C. Whitmann [11] figure, dans sa belle planche, un organe cilié de *Glossiphonide*. Le mémoire ne parle pas de cette formation, mais l'explication de la planche la mentionne explicitement comme *entonnoir* de l'organe segmentaire (*nephridial funnel*).

1892. Après avoir publié quelques recherches sur les organes segmentaires de plusieurs Hirudinées (*), nous avions donné un premier mémoire sur les *organes ciliés des Néphélides*, espérant donner un second mémoire sur les mêmes organes dans d'autres genres. Nous soutenions dans ce travail (**) que l'*organe cilié* n'est pas simplement l'*entonnoir* des *nephridia* : une des raisons, assez concluante à notre avis, est que l'*organe cilié* n'est pas en continuité, en relation directe avec l'organe segmentaire.

1893. Au mois d'avril parut un article du professeur de Madras, M. A.-G. Bourne [7]. Il y passe en revue ce qui a été dit sur les organes segmentaires et les *entonnoirs*, par nous-même dans les quatre mémoires indiqués, et par lui dans son mémoire de 1884 [6]. Les auteurs antérieurs sont tous laissés de côté par Bourne, puisque lui-même est le dernier qui ait écrit avant nous; d'où il se croit autorisé à décrier comme faux tout ce que nous proposons de contraire à ses opinions, bien que, pour plusieurs points, des auteurs antérieurs partagent notre manière de voir. La conclusion de l'article cité est facile à énon-

(*) H. Bolsius, S. J. : 1. *La Cellule*, 1889; — 2. *Item*, 1890; — 3. *Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles*, 1892.

(**) H. Bolsius, S. J., *La Cellule*, 1890.

cer : Bourne a bien vu tout, partout et toujours; — Bolsius a mal expérimenté, mal vu, mal interprété, mal énoncé : c'est un exemple montrant comment il ne faut pas faire.

1893. Le *Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft* [12] contient un travail intéressant de Arn. Graf. Il s'occupe exclusivement de la *Nephelis vulgaris*, et la conclusion qui nous intéresse principalement dans son mémoire est celle-ci : Les *organes ciliés* sont *les vrais entonnoirs* des *nephridia* chez les Hirudinées.

1893. En même temps que Graf, A. Leuckart [13] a rompu une lance pour la connexion des prétendus *entonnoirs* avec le *nephridium* chez les Hirudinées (par l'intermédiaire de la cavité annexe chez les Glossiphonides). Le savant d'Iéna se persuade avoir vu cette connexion.

La forme de ce que nous décrivons ici sous le nom d'*organe cilié* est décrite par Leuckart avec assez d'exactitude. Il croit avoir observé que la *Cl. tessellata* présente *quatre* prolongements pourvus chacun d'un noyau, au lieu de deux prolongements comme chez les autres Glossiphonides. La cavité annexe serait toujours plongée dans la substance du corps.

Le pied de l'*entonnoir* s'étendrait sur la surface interne de la cavité, comme un revêtement mince et pourvu de vaisseaux.

I.

Descriptions préliminaires (*).

1° *Distribution et situation des organes ciliés.*— Les figures 1 et 2 proviennent de *Glossiphonia complanata;* les sections sont parallèles à la face ventrale. La figure 1 ne contient que le côté gauche de la partie antérieure, c'est-à-dire depuis la moitié de la longueur jusque près de l'orifice femelle. Cet orifice se trouverait à 1 ou 2 centimètres au-dessus de l'extrémité supérieure de notre figure. La moitié droite de ce même individu avait servi à des sections longitudinales.

La figure 2 est une section à plat de la moitié postérieure d'un individu. En décrivant un cercle qui aurait pour centre le point x, et pour rayon la distance de x au bord de la figure, on obtiendrait à peu près la circonférence de cette extrémité de l'animal.

Dans les deux figures, CP indique la *cavité périviscérale.* Le long de ses bords, nous voyons distribués, dans la figure 1 comme dans la figure 2, des corps marqués T. Ce sont les testicules. Entre chaque paire de testicules se trouve un autre corps, CA, qui porte un prolongement, OC, se projetant dans la cavité péri-

(*) *Remarque.* — Cette partie de notre travail se compose d'une sorte d' « explication des figures » très détaillée. C'est pourquoi nous prions les lecteurs d'avoir continuellement recours à nos planches.

Un mot sur nos figures, et sur la manière dont nous les avons obtenues.

Dans les figures d'ensemble, par exemple figures 1 et 2, les contours sont tracés à la chambre claire sur des préparations microtomiques; aussi pouvons-nous indiquer le grossissement exact, c'est-à-dire le système de lentilles avec le nombre approximatif de l'ampliation à la hauteur de la platine. Quelques détails de ces figures sont souvent pris dans des coupes précédentes ou suivantes, les coupes principales ne les contenant pas toujours à cause de leur minceur et de l'étendue de l'objet à représenter.

Le lecteur remarquera du premier coup d'œil beaucoup de détails *en lignes pointillées.* Ce sont des détails qui n'ont pas directement trait au sujet de la figure, et que nous donnons seulement à titre de renseignement et d'orientation. Ayant reconnu que le dessin soigné de ces détails absorbe un temps précieux, que souvent le défaut d'attention fait qu'on ne rend pas ces points-là avec l'exactitude nécessaire, qu'enfin ils donnent prise à des critiques sur des choses qu'on n'a représentées qu'incidemment, nous avons jugé qu'il serait plus utile de les indiquer par une simple ligne pointi lée qui suffira pour l'inelligeuce, et ne compromettra en aucune façon l'exactitude

viscérale CP. Les premiers, CA, sont des cavités ou ampoules, et les prolongements OC sont les formations qui nous occupent, *les organes ciliés.*

Ces formations sont placées symétriquement dans les deux côtés, une dans chaque segment. Il n'y a d'exception que pour les segments extrêmes, antérieurs et postérieurs; mais, contrairement à ce qu'on trouve chez les *Néphélides,* des organes ciliés se montrent chez les *Rhynchobdellides,* même dans deux segments précédant l'orifice mâle, et par conséquent antérieurs à ceux qui apparaissent dans notre figure 1.

Pour faciliter davantage l'orientation dans nos figures, nous indiquons dans la figure 1 par *Tr* l'endroit où se montre la trompe protractile, dont la face inférieure est entamée dans notre coupe; et dans la figure 2, par *Cœ* les sections des deux longs cæcums en dedans desquels se trouvent les testicules et les organes ciliés.

La distribution et la situation ainsi déterminées, passons à la description de la formation même.

2° *La formation entière prise dans son ensemble.* — A un grossissement médiocre, nous constatons facilement que toute la formation dont nous venons de parler est composée de deux parties différentes. La figure 3 donne l'aspect d'une de ces formations prise dans la figure 2, entre les deux derniers testicules à droite : un carré en pointillé indique l'endroit.

Il y a une première partie OC proéminante et flottant dans la cavité périviscérale CP. Cette partie OC est renflée à la base qui pénètre dans la seconde partie CA, la cavité annexe.

Dans cette figure 2, notre objet est dessiné tel qu'il se trouve dans une section microtomique, ne représentant par conséquent qu'une coupe qui n'est pas même exactement axiale pour la partie OC.

Cette figure est néanmoins suffisante pour donner une idée de toute la formation prise dans son ensemble.

Celle-ci consiste dans une partie mobile, libre, flottant dans la cavité périviscérale. Cette partie est emboîtée par *le pied* ren-

flé dans une cavité assez spacieuse, creusée dans le tissu conjonctif commun du corps. Ce pied est immobile, maintenu en place par les tissus qui le revêtent extérieurement.

Les deux parties mentionnées, *l'organe cilié*, OC, et *la cavité annexe*, CA, vont être examinées successivement dans les différentes espèces et à différents âges d'une même espèce.

II.

A. Description du type des organes ciliés dans des individus adultes.

Par les trois figures précédentes, les lecteurs ont pu déjà se convaincre que la partie nommée par nous *organe cilié* ne se présente pas toujours avec les mêmes allures : elle se recourbe, elle se plie, elle se tord.

Pour en donner une représentation idéale, nous aurons recours à des figures schématisées qui la montrent sous différents aspects. Ces figures-ci seront légitimées sur les figures ultérieures faites d'après nature, à l'occasion desquelles nous aurons soin de renvoyer à ces schémas, dans lesquelles ils s'expliquent aisément, et qui par là-même reçoivent un grand appui (*).

La figure 4, A, est un organe cilié de *Glossiphonia complanata* adulte. Il est vu de côté, un peu d'en haut, comme l'indique la partie supérieure, où apparait la crête de la paroi postérieure.

On y distingue trois parties : a) *le tronc* ou *la tige, tr*; b) *les branches, br*; c) *le pied* ou *le bulbe, p.*

a) *Le tronc tr*, qui est droit ici, peut se courber et se plier dans toutes les directions, comme dans les figures précédentes. On en trouve de plus longs relativement que celui-ci.

Une coupe transversale, figure 4, D, montre le tronc creusé d'un canal, qui le traverse dans toute sa longueur, comme le prouveront les figures suivantes.

(*) La raison qui nous porte à ne pas dessiner les organes ciliés en perspective d'après les dissociations est que là ils sont trop incomplets, souvent déchirés, et jamais dans leurs relations naturelles.

Ce tronc mobile est coiffé de *deux branches, br*; ces branches sont placées régulièrement aux deux côtés, l'une vis-à-vis de l'autre, en ligne droite.

b) Pour reconnaître ces branches, il faut regarder l'organe d'en haut, verticalement. C'est la figure 4, B, qui les présente de cette manière. Les deux branches présentent alors chacune deux renflements longitudinaux, séparés par un creux ou enfoncement. La figure 4, C, est une coupe transversale de l'une des branches : elle fait voir que les branches forment une gouttière ouverte par le haut. C'est la *gouttière longitudinale, gl,* dont nous parlerons plus tard, et qui est traversée, au-dessus du tronc, par une plus faible gouttière, que nous appellerons la *gouttière transversale, gt.* Toutes ces gouttières s'unissent ou confluent avec le canal du tronc, ou canal central, CC.

Ces branches ne gardent pas une situation invariable par rapport au tronc : elles s'inclinent vers le tronc, se dressent, se courbent, et tout cela indépendamment l'une de l'autre, ce qui fait que les sections présentent les dispositions les plus bizarres et souvent infiniment difficiles à interpréter et à réduire aux formes schématiques.

c) *Le pied* ou *le bulbe, p,* qui termine le tronc du côté opposé, est la partie immobile de l'organe cilié. Il est enclavé dans la cavité annexe, CA. Il consiste dans un renflement brusque du tronc. Ce pied est circulaire comme le tronc, et percé dans son centre, ainsi que nous le verrons plus loin.

Les relations entre le pied et la paroi de la cavité CA seront étudiées plus tard.

De cette description nous concluons que la forme générale de *l'organe cilié* est celle d'un T. Dans cet organe, le pied seul est immobile; le tronc et les branches sont mobiles, flexibles.

Le tronc contient un canal, les branches sont creusées de gouttières qui communiquent avec ce canal.

Cette forme se retrouve dans toutes les espèces que nous avons examinées à l'âge adulte ; nous allons le prouver par des figures faites directement sur les préparations microtomiques. En même temps nous nous occuperons des *cils vibratiles* et des *noyaux* de l'organe cilié.

B. Description des organes ciliés dans des individus adultes examinés en sections.

a) *Glossiphonia complanata.*— Parmi les nombreuses sections de *Gloss. complanata*, nous en avons rencontré une qui contient une coupe presque idéale de tout l'organe cilié. Cette coupe est rendue par la figure 5 (*).

La comparaison entre le schéma, figure 4, A, et cette figure-ci est aisée. C'est une coupe axiale dans toute la longueur.

Venons aux nouveaux détails de cette figure 5.

1° *Les cils vibratiles.* — Ces cils ornent la paroi du canal central, *cc*, dans toute sa longueur. Leur direction aux deux extrémités, inférieure et supérieure, est opposée, toujours vers l'orifice le plus rapproché. Dans le trajet, cette direction change insensiblement.

La figure 5 montre les branches, *br*, surmontées de cils vibratiles, *cv*, qui disparaissent à l'extrémité des branches. Cependant ce ne sont pas les bords élevés (voyez fig. 4, C), mais le fond de la gouttière longitudinale (G*l*, fig. 4, B) et ses parois qui les portent. La section de la figure 5 passe exactement par le fond de cette gouttière.

Le pied, *p*, dans la figure 5, présente la disposition typique des cils vibratiles, *cv*, dans cette partie de l'organe cilié. On remarquera l'abaissement de la surface du pied autour de l'orifice du canal central. C'est la forme normale de la *Glossiphonia complanata*. Cet abaissement est circulaire, comme nous verrons tout à l'heure. C'est lui seul qui est pourvu de cils vibratiles; la partie plus renflée du pied n'en porte jamais.

2° *Les noyaux.* — Chacune des branches possède un énorme

(*) Avant de parcourir les détails de cette figure, une remarque est nécessaire. L'individu d'où provient la section n'est pas entièrement développé, dans la *Glossiphonia complanata* adulte et de grandeur normale, les branches, *br*, sont plus longues. A part ce petit détail, la figure 5 représente l'organe adulte; on s'en convaincra plus loin. Nous avons choisi cet exemplaire parce qu'aucun autre ne nous a présenté une section aussi complète sans recourir à la synthèse.

noyau, *n*, vers son extrémité distale : c'est aussi la disposition normale.

Dans le tronc, *tr*, nous indiquons un noyau, *n*, vu par transparence. Il se trouvait à une plus grande profondeur que le canal central, *cc*. C'est encore le cas ordinaire de ne rencontrer qu'*un* seul noyau dans le tronc.

Enfin le pied, *p*, possède aussi un seul noyau dans l'épaisseur de la substance protoplasmatique qui le forme.

Le tissu conjonctif, *tc*, qui environne la cavité annexe, CA (comparez les figures précédentes), monte le long du tronc, *tr*, jusqu'à une certaine hauteur, qui n'est pas toujours exactement la même.

Il y a, parmi ces détails, plusieurs points qui méritent d'être prouvés par d'autres figures plus démonstratives.

Commençons par le pied de l'organe cilié, avec sa dépression qui porte les cils.

La figure 6 nous montre le pied vu de face. Elle est dessinée sur une coupe dorso-ventrale, dans laquelle seule on a le plus de chance de la rencontrer, d'après la disposition des organes ciliés indiquée dans les figures 1 et 2.

On voit dans cette préparation (fig. 6) trois circonférences concentriques. L'extérieure montre la circonférence du pied ; la médiane limite la portion abaissée que présente la figure 3, et l'intérieure circonscrit la lumière du canal central, *cc*.

Avec un bon objectif, par exemple apochromatique à immersion, ou même à sec s'il est assez puissant, le jeu de la vis micrométrique fait découvrir aisément les cils vibratiles, *cv*, sur la zone comprise entre la limite interne et moyenne. Ces cils étant dirigés pour la plupart vers l'observateur, il faut le jeu de la vis, sans quoi l'on ne voit que des lignes très courtes, ou même des points, comme le montre la figure 6.

La zone extérieure est absolument privée de cils vibratiles.

Dans la profondeur de la substance du pied, on remarque par transparence le gros noyau, *n*, avec son énorme nucléole.

Le relief que nous avons tâché de donner à la figure 6 s'aperçoit même au microscope lorsqu'on fait intervenir le jeu du diaphragme-iris et de la lumière oblique.

Un autre détail intéressant est la mobilité du tronc et des branches.

La figure 7 offre une preuve d'un mouvement extraordinaire.

Remarquons, à l'occasion de cette figure 7, une chose qui ne laisse pas que d'avoir son importance. Comment avons-nous fait pour observer la mobilité de l'organe cilié? L'avons-nous dessinée sur le vivant?

Non; mais les animalcules sont fixés et coupés *en entier*. La fixation très rapide par la liqueur de Gilson (*) a surpris les organes dans une certaine position, résultant de leur mobilité. Cette position varie d'un objet à l'autre et montre les phases différentes du mouvement.

Nous devons ainsi admettre que la position de l'organe cilié de la figure 7 est celle qu'il avait au moment de la fixation.

En comparant le tronc, *tr*, avec celui du schéma, fig. 4, A, on se convainc de l'amplitude du mouvement possible du tronc. Dans les figures 1, 2 et 3, on en trouve d'autres exemples.

La partie la plus instructive de cette figure 7 est celle qui porte les branches br_1 et br_2.

Observons en passant que, pour ne pas embrouiller le dessin en perspective, les cils vibratiles ne sont dessinés qu'*aux extrémités* des gouttières, *gl* et *gt*.

En comparant la branche br_1 de la figure 7 à notre schéma, figure 5, B, tous les détails s'y retrouvent facilement : les deux renflements longitudinaux, avec la gouttière longitudinale, *gl*, comprise entre les deux.

Ces renflements dépassent un peu *le fond* de la gouttière au bout libre de la branche.

Du côté où la branche est reliée au tronc, les bourrelets de la branche br_1 s'arrêtent et laissent place à la gouttière transversale, *gt*.

(*) Une preuve de la rapidité de la fixation est facile à voir dans les cils vibratiles. Lorsqu'on laisse mourir un tissu quelconque orné de cils, ceux-ci finissent par devenir tous absolument droits. La fixation *post mortem* leur conserve cette direction. Dans nos préparations, nous n'avons observé que des cils *ondulés*, c'est-à-dire fixés pendant leur mouvement. Il en est de même pour les organes ciliés entiers.

Au point d'entre-croisement des deux gouttières, on voit l'orifice du canal central (cc de la fig. 4, B).

L'autre branche, br_2, dans la préparation qui nous a servi, se dirigeait perpendiculairement à la première, br_1 : par conséquent elle a été sectionnée presque au point d'insertion sur le tronc. Cette circonstance nous a valu l'aspect d'une coupe transversale. On voit la ressemblance de cette coupe avec la figure 4, C, du schéma.

En même temps, cette figure 7 prouve la mobilité des branches par rapport au tronc, et aussi leur indépendance dans leurs mouvements vis-à-vis l'une de l'autre.

Le pied, *p*, enclavé dans la cavité annexe, CA, étant entamé dans notre préparation, nous le dessinons en coupe et non en relief.

D'autres détails pourraient être démontrés par des coupes d'organes ciliés de la *Glossiphonia complanata*, par exemple le revêtement partiel du tronc par le tissu conjonctif. Nous aurons l'occasion de proposer ces détails sur les dessins d'autres espèces. Celles-ci étant habituellement plus petites, il nous sera plus facile de donner des figures typiques, très souvent trouvées dans une seule section. Cela tient à ce que deux ou trois coupes d'une quinzaine de microns épuisent l'organe dans sa longueur chez ces petites espèces. Si le rasoir rencontre un organe longitudinalement, il n'est pas rare de voir tout l'organe en une ou deux sections consécutives. Dans la *Glossiphonia complanata*, il en faut dix ou plus encore.

b) *Glossiphonia bioculata*. — La figure 8 contient les trois coupes successives d'un organe cilié d'un individu adulte. Chaque coupe avait l'épaisseur de 7 $^1/_2$ μ.

Rapportons ces trois figures, A, B, C, aux dessins schématiques de la figure 4. En A, il n'y a que le bord supérieur des bourrelets de la branche. Par la mise au point, on peut se convaincre que néanmoins *le fond* de la gouttière longitudinale, *gl*, est compris dans l'épaisseur de cette coupe.

Il y a sur cette branche br_1 deux bourrelets parfaitement

achevés aux extrémités, ce que révèlent bien les cils vibratiles, *cv*, qui contournent ces extrémités.

Mieux que la seule figure 8, A, la figure 8, B, en relation avec la figure A, démontre ce détail; car il faut se figurer ces deux dessins superposés. La différence des contours de br_1 dans les deux dessins prouve le changement de forme extérieure de la branche sur cette petite profondeur de 7 $^1/_2$ μ.

Débrouiller la disposition exacte de la branche br_2 de la figure 8, B, n'est pas facile pour tous les détails : l'enchevêtrement des cils vibratiles dans toutes les directions rendait l'aspect indéchiffrable. Néanmoins la position générale est assez visible.

Les deux branches, br_1 et br_2, forment entre elles un angle à peu près droit. De cette manière, au lieu d'avoir la forme du schéma figure 4, B, on a les gouttières longitudinales, *gl*, A, et *gl*, B, placées sur une ligne brisée.

Puisque l'un des deux bourrelets de la branche br_2 se cachait à nos yeux dans la figure 8, B, il était impossible de retrouver exactement la gouttière transversale, *gt*, du schéma. Néanmoins la figure 8, C, en présente encore les vestiges dans l'invagination du bord externe supérieur.

Cette figure 8, C, donne la section longitudinale de tout le tronc, *tr*. Nous le rendons tel qu'une mise au point pour l'axe du canal central nous le montre.

Ce tronc est très court, comme partout dans la *Glossiphonia bioculata*.

Comme le lecteur l'aura remarqué, l'organe cilié de cette espèce est bâti sur le même plan que celui de la précédente espèce.

Relevons deux particularités, que nous avons retrouvées dans tous les organes ciliés de tous les individus examinés par nous.

1° *Les cils vibratiles.* — Ces cils, vu la grandeur, ou plutôt la petitesse de l'ensemble, sont toujours extraordinairement longs, beaucoup plus longs que ceux de l'organe cilié de la *Glossiphonia complanata*.

2° *Les noyaux.* — De même que les cils vibratiles, et plus encore, les noyaux de l'organe cilié dans cette espèce sont

immenses. Les trois coupes, A, B, C de la figure 8, contiennent chacune une tranche du noyau de la branche *br*$_1$, et ce n'est que dans la troisième que le nucléole apparaît. Le noyau de la branche *br*$_2$ se trouve figuré en C seulement, la coupe B en contenait une partie cachée sous les cils.

Ces noyaux sont si développés chez cette espèce, qu'ils repoussent souvent la paroi externe, dans le tronc par exemple, comme le prouve la figure 9.

Pour bien comprendre cette figure, et la rattacher au schéma A de la figure 4, il faut se représenter une coupe *axiale* du tronc avec le pied, mais dans un *plan perpendiculaire* à celui de la figure 6.

La section de la figure 9 passe, non par le plan de l'axe de la gouttière longitudinale, *gl*, figure 4, B, mais par le plan de l'axe de la gouttière transversale, *gt*, *ibid.* Il n'y a donc rien des branches, puisque la section passe exactement entre les deux.

c) *Glossiphonia* (*Hemiclepsis*) *tessulata.* — Cette espèce encore nous a fourni une série de coupes que nous mettons sous les yeux du lecteur dans la figure 10, A, B, C, D, E. Puisque chaque coupe est de 10μ d'épaisseur, et qu'en cinq coupes l'organe cilié est épuisé, toute la longueur n'atteint pas même 50μ ou le vingtième d'un millimètre.

La figure 10, A, contient toute la face supérieure de l'organe. Il est superflu de rappeler que c'est exactement la représentation du schéma figure 4, B, réalisé ici.

La section A n'est cependant pas entièrement parallèle à la face supérieure; la section B, figure 10, présente encore la partie inférieure d'une branche. Il est possible néanmoins que cela tienne à ce que la branche était un peu recourbée en bas.

Dans cette section B on trouve la partie supérieure du tronc, qui, comme le montrent les sections C et D, diminue beaucoup en diamètre. Ce tronc est nu dans B et C; mais en D il est enveloppé d'une tunique de tissu conjonctif. On la reconnaît facilement à cause de la coloration intense du tronc qui tranche fortement sur la tunique hyaline.

Lorsque nous traiterons de la cavité annexe, nous reviendrons à la section E, figure 10.

Remarquons les particularités trouvées dans les branches et le tronc :

1° *Les cils vibratiles.* — Ils sont disposés comme partout ailleurs, et leur longueur est bien moindre que dans la *Glossiphonia bioculata.*

2° *Les noyaux.* — Dans les deux branches se trouvent les deux noyaux (un seulement est figuré, l'autre étant contenu dans l'épaisseur de la coupe A) à l'endroit habituel, c'est-à-dire vers l'extrémité de la branche.

Le tronc en section, figure 10, C, en présente un aussi. Mais tous les trois sont extrêmement petits en comparaison de ceux de l'organe cilié de la *Glossiphonia bioculata.*

d) *Glossiphonia* (*Hemiclepsis*) *marginata.* — Les deux dessins de la figure 11, A et B, contiennent nombre de détails dont nous aurons à parler plus tard. Pour le moment, nous appelons l'attention uniquement sur l'organe cilié de la figure 11, A. Cette coupe présente l'organe dans la section la plus typique : le schéma y est reconnaissable à tout le monde.

N'insistons donc que sur la position des branches qui se démontrent ici encore une fois mobiles.

Le pied, en coupe, est aussi ce qu'on peut trouver de plus caractéristique pour cette partie de l'organe.

Les *cils vibratiles* n'ont rien de particulier; les *noyaux* (celui de la deuxième branche se trouve dans la coupe suivante, figure 11, B) se font remarquer seulement par leur petitesse, surtout lorsqu'on les compare à ceux de l'organe de *Glossiphonia bioculata*, qui dans son ensemble n'est pas plus grand que l'organe de cette espèce-ci.

III.

Description de l'organe cilié dans les individus très jeunes.

A. — Le type schématique.

Pour introduire cette description, nous donnons d'abord une figure schématique, comme nous l'avons fait pour l'organe cilié dans les adultes.

La figure 12 présente en A et B l'aspect du jeune organe; vu dans sa longueur en A, et vu d'en haut en B.

Le pied, *p*, ne diffère pas de celui de l'organe adulte; le tronc, *tr*, est plus court; mais la différence principale gît dans le sommet.

Ce sommet, dans une coupe longitudinale, figure 12, A, pourrait faire penser à une coupe d'un organe adulte, mais dans le plan de l'axe de la gouttière transversale, *gt* de la figure 4, B. C'est ce que nous avons vu dans la figure 9.

Il faut, pour s'assurer aisément du contraire, qu'on rencontre une coupe horizontale de l'organe. Le véritable aspect d'en haut est celui que montre le schéma, figure 12, B. Il y a là deux bourrelets, br_1 et br_2. Ces deux bourrelets sont séparés par une gouttière, *gt*; eux-mêmes cependant ne possèdent pas encore de gouttière, creusée dans le sommet.

Ces deux bourrelets vont s'allonger perpendiculairement à la direction de la gouttière transversale, *gt*.

Nous allons constater ces divers points de vue sur des coupes de jeunes organes de deux espèces.

B. — Examen des individus sectionnés.

a) *Glossiphonia complanata.* — La preuve de l'exactitude du schéma, figure 12, B, est dans les trois dessins, A, B, C, qui forment la figure 13. Ce sont trois coupes successives d'un organe cilié de jeune *Glossiphonia complanata*. Les coupes avaient 10μ

d'épaisseur. La première, A, a rencontré le noyau d'un des deux bourrelets ; la seconde, B, contient le noyau de l'autre.

Nous croyons en conséquence que les sections ne sont pas rigoureusement horizontales, mais tant soit peu obliques.

Dans ces deux figures nous voyons la gouttière transversale séparant les deux bourrelets.

La troisième, C, montre le commencement du canal central de l'organe.

On nous dispensera de donner les sept coupes suivantes qui épuisent l'organe. Elles ne nous apprendraient rien que nous n'ayons déjà vu. A moitié de la longueur du tronc se trouve le noyau, comme cela se voit dans la figure 10, C, de l'organe cilié de la *Glossiphonia marginata,* et dans figure 9, de la *Glossiphonia bioculata.*

b) *Glossiphonia hyalina.* — Cette jolie espèce de *Glossiphonie* n'a pas été mentionnée parmi celles dont nous avons donné l'organe à l'état adulte. Nous l'avons omise là pour ne pas tomber dans des redites. En la conservant pour la description de l'organe cilié jeune, nous voulons la présenter comme un exemple de ce qui se passe dans le développement de cet organe chez toutes les espèces citées plus haut.

L'animal étant de dimensions très petites, on conçoit que son organe cilié est très petit aussi, même à l'état adulte. Il l'est plus encore au jeune âge. En trois coupes de 10 μ nous l'avons épuisé. Ces trois coupes sont rendues dans la figure 14, A, B, C.

De ces figures, la première, A, est la plus instructive.

L'organe cilié que nous avons rencontré ici est plus développé que celui de la *Glossiphonia complanata,* figuré tout à l'heure. Les bourrelets du schéma, figure 12, B, sont déjà un peu allongés ici.

On constate facilement que la croissance des branches se fait dans le sens indiqué, c'est-à-dire perpendiculairement à la gouttière transversale.

Aussi la gouttière longitudinale, qui va diviser le sommet des bourrelets, se fait jour. Cette gouttière est déjà visible dans l'invagination que montrent les deux parties du sommet.

Les deux autres figures, B et C, n'ont pas d'importance pour le moment, à moins qu'on ne veuille constater que la coupe de l'organe en C est plus large que dans la coupe B. Cela tient à ce que C contient *le pied* de l'organe, qui est toujours plus élargi que le tronc.

IV.

Description de la cavité annexe.

Dans les *Rhynchobdellides* il y a une cavité plus ou moins spacieuse qui fait suite à l'organe cilié, c'est-à-dire dans laquelle celui-ci débouche. C'est donc cette cavité qui devrait être en connection directe avec l'organe segmentaire; car évidemment l'organe cilié comme tel n'est pas placé sur l'extrémité du nephridium, et n'en est pas l'entonnoir immédiat.

Puisque la cavité est de même nature dans les diverses espèces, nous ne parlerons pas en particulier de chacune d'elles.

a) La situation de la cavité annexe. — Les figures 1 et 2 nous renseignent déjà sur ce point. Ces cavités annexes, CA, sont rangées le long de la cavité périviscérale, CP, alternant avec les testicules, T. Elles sont là, creusées dans le tissu conjonctif général du corps.

La figure 3 prouve que les cavités sont séparées de la cavité périviscérale par une mince paroi de ce tissu.

Cette situation *dans* le tissu conjonctif est la situation ordinaire, mais pas l'unique. Toute la cavité annexe peut faire saillie dans la cavité périviscérale, comme l'atteste la figure 10, E, mais surtout la figure 11, A. C'est la partie postérieure de la *Glossiphonia* (*Hemiclepsis*) qui nous a fourni cette figure. La cavité périviscérale, CP, qui entoure la section de l'intestin, *int*, est revêtue de tissu conjonctif, *tc*. Ce tissu même est encadré dans cette coupe par des muscles, *m*.

La cavité annexe, CA, au lieu d'être noyée dans ce tissu, comme dans les figures 1, 2, 3, en sort pour ainsi dire, et se trouve comme expulsée dans la cavité périviscérale CP. Les

coupes précédentes et les suivantes démontrent qu'il en est ainsi de *toute* cette cavité annexe. Pour ne pas surcharger de figures notre mémoire, nous omettons de dessiner une à une toutes ces coupes; nous n'en donnons que deux, figure 11, A et B. Dans cette dernière nous supprimons même les détails de tissu conjonctif général et de musculature.

b) La constitution de la paroi de la cavité annexe. — 1° *La couche externe.* — La cavité annexe a toujours deux revêtements.

Lorsqu'elle est creusée dans le tissu conjonctif général, comme dans les figures 1, 2, 3, la couche externe s'identifie avec ce tissu conjonctif, et on ne distingue guère le revêtement de tissu comme une couche à part.

Mais dans les cas où la cavité annexe fait en partie ou entièrement saillie dans la cavité périviscérale, nous constatons aisément que sa limite extérieure est formée par un revêtement de tissu conjonctif. C'est ce que l'on voit dans la figure 10, E, et dans la figure 11, A.

Ce tissu conjonctif est en continuité avec le tissu conjonctif général du corps : on le voit dans les deux figures citées.

La couche cependant est bien faible, quoique rendue très visible par les réactifs colorants.

2° *La couche interne.* — Sur cette couche externe repose une seconde couche qui est intimement appliquée à la première et y adhère complètement. C'est un épithélium à cellules très aplaties.

Nous jugeons utile de donner ici des figures nouvelles, plus détaillées que les précédentes.

La figure 15 va nous renseigner sur bien des points. La cavité annexe, CA, est plongée dans le tissu conjonctif, *tc*, et se trouve placée entre la cavité périviscérale, CP, un testicule, T, et un diverticule de l'intestin, *int*. Sur la surface du tissu conjonctif, du côté de la cavité annexe, se voit l'épithélium pavimenteux, *ep*.

Il n'y a rien à remarquer à ce sujet, si ce n'est pour l'endroit où le pied de l'organe cilié, *p*, entre dans la cavité. L'épithélium, à cet endroit, recouvre le pied jusqu'à la base des cils vibratiles, *cv*;



l'épithélium, qui partout ailleurs est d'une assise seulement, s'épaissit sur le pied, où l'on constate une quantité de petits noyaux. Les limites des cellules épithéliales sont pour ainsi dire imperceptibles.

La démarcation entre le bourrelet du pied et les cellules épithéliales qui le recouvrent n'est pas facile à saisir. Très souvent nous n'avons pas pu la voir d'une façon bien nette. Ce sont surtout les colorants bien électifs joints à des coupes très fines qui aident à produire des préparations démonstratives.

c) Le contenu de la cavité annexe. — Une des questions qui divisent les auteurs est celle du contenu de la cavité annexe de l'organe cilié ou, comme ils disent, de l'ampoule de l'entonnoir.

Voici les aspects d'une coupe de cette cavité, prise dans des individus d'âge divers.

La figure 16 est fournie par un individu très petit, par conséquent très jeune, mais dont l'organe cilié est déjà pourvu de ses branches. La cavité, CA, est occupée par des globules de grandes dimensions, qui ne remplissent pas complètement le vide. Ce sont évidemment des cellules, puisque nous y remarquons des noyaux bien formés.

La figure 17 est tirée d'un individu complètement adulte, de dimension ordinaire. La cavité, CA, ici, est littéralement comblée d'éléments qui sont encore des cellules. Ces éléments sont nombreux, pressés les uns contre les autres, de manière à ne laisser presque pas d'interstices.

La figure 18 enfin montre l'aspect d'une coupe dans la cavité annexe, CA, telle qu'on la trouve dans les individus probablement assez âgés : les nôtres avaient été pris dans un ruisseau, peu de temps après la ponte, car ils recouvraient encore leurs œufs (*).

(*) C'est une erreur de croire que les Glossiphonides attachent *les œufs* à la face ventrale du corps. Elles pondent en recouvrant de leur corps les œufs qui adhèrent *à l'objet* sur lequel ils sont pondus, et non au corps de la mère : mais après un jour ou deux *les embryons s'attachent* au ventre de l'individu-mère, et y adhèrent par leur ventouse postérieure.

Ici, la cavité annexe, CA, n'est plus remplie de cellules bien nettes; au premier coup d'œil, on croit voir un réticulum entre les mailles duquel quelques éléments cellulaires avec leurs noyaux sont emprisonnés. Une observation plus attentive dévoile clairement une quantité de noyaux aplatis contre les parois de ces mailles apparentes. Ce sont toutes des cellules vides dont le noyau est pressé contre la membrane, comme cela se voit dans les cellules mucipares, par exemple. Les parois des anciennes cellules (voyez fig. 17) sont chiffonnées et donnent à l'ensemble l'apparence d'un réticulum irrégulier.

d) L'ABSENCE DE COMMUNICATION ENTRE LA CAVITÉ ANNEXE ET L'ORGANE SEGMENTAIRE. — Ce point-ci est le plus important de tous ceux qui regardent la formation singulière que nous avons entrepris de décrire.

Il n'y a pas de communication entre la cavité en question et le néphridium.

Démontrer par des figures une absence, une négation, est chose très difficile. Néanmoins nous prouvons notre assertion par des figures. Dans dix coupes de 10 μ nous avons épuisé une de ces cavités annexes dont la disposition était des plus favorables.

La minceur des coupes nous garantit qu'il n'y a rien dans l'épaisseur des préparations qui nous ait échappé. La forte coloration de tous les autres tissus, à l'exception du tissu conjonctif, facilite la découverte des contours. Enfin, la proéminence de la cavité annexe dans la cavité périviscérale, et la couche mince extérieure de tissu conjonctif rend cet objet essentiellement démonstratif.

Dans la figure 19, I-X, sont représentées les dix sections successives, dans lesquelles la cavité annexe, CA, est parcourue d'un bout à l'autre. Eh bien, cette cavité est toujours close de tous les côtés, sauf à l'entrée du pied de l'organe cilié, figure 19, VI. Partout le tissu conjonctif la délimite, et nulle part aux approches de la cavité n'apparaît l'ombre d'un bout d'organe segmentaire.

Nous prouvons ainsi *l'absence* de toute communication par la *présence* actuelle et constante d'une clôture évidente.

V.

Remarques critiques et conclusions.

Nous ne nous occuperons que des auteurs qui ont traité spécialement du même objet que nous, c'est-à-dire de l'organe cilié et de la cavité annexe de *Glossiphonides*.

Les deux figures que Leydig a consacrées à ce sujet sont rendues dans notre planche III, figures 20 et 21. Elles sont trop peu détaillées pour donner une idée exacte de l' « entonnoir ». Chez Leydig, il n'est pas encore question de la cavité annexe.

La première figure contient certainement une erreur, en rendant la formation comme terminée par le bas; on ne soupçonne pas même qu'il y ait encore une partie, *le pied*, qui fait défaut. La seconde figure est meilleure à ce point de vue, puisqu'elle représente l'organe comme déchiré à la base; mais les noyaux dans le tronc sont absolument erronés.

Le premier auteur qui mentionne la *cavité annexe* est C.-K. Hoffmann (*). Les figures qui accompagnent son travail sont rendues ici, planche III, figures 22, 23 et 24. Il en parle ainsi :

« .... On remarque que le manchon (de l'entonnoir) se con-
» tinue dans une petite poche ronde en forme de cæcum (voyez
» la fig. 5, pl. VII, reproduite ici dans la fig. 25). La poche a
» l'aspect finement granuleux. A un grossissement plus fort, on
» remarque que cette poche consiste en une membrane mince,
» faible, conjonctive, et qu'elle est remplie d'éléments cellu-
» laires. La figure 6, planche VII (reproduite ici dans la fig. 24),
» montre trois de ces cellules à un grossissement plus fort.
» Leur forme est irrégulière; le noyau arrondi, avec un petit
» nucléole, est placé excentriquement; le protoplasme, finement
» granulé, contient de nombreux grumeaux brillants, anguleux

(*) C.-K. Hoffmann, *Untersuchungen üb. d. Bau u. d. Entwickelungsgesch. d. Hirudineen*, 1880, p. 58.

» ou arrondis, de la nature desquels je ne puis indiquer rien de
» plus. Les mouvements des cils vibratiles des formations que
» je regarde comme les orifices internes des organes segmen-
» taires, sont de telle nature qu'ils ne peuvent charrier les pro-
» duits que vers la poche avec laquelle ils sont en relation.
» Comment les formations en question (c'est-à-dire les enton-
» noirs) sont en connexion avec les autres parties de l'organe seg-
» mentaire, je ne le sais pas, même je ne saurais l'indiquer
» hypothétiquement. Et cependant on ne pourrait supposer
» autre chose, si ce n'est qu'ils forment l'orifice interne des
» organes segmentaires, supposition qui se fortifie encore lors-
» qu'on se rappelle que leur nombre répond à celui des organes
» segmentaires. »

Les représentations que donne Hoffmann des formations réputées *entonnoirs* ne sont pas très instructives. Qu'on les compare aux nôtres, et qu'on juge. Mais la description donnée par l'auteur dans son travail est plus précise sur quelques points. Il parle explicitement des deux branches et d'une gouttière — pour nous c'est la *gouttière longitudinale*; — mais il n'est pas question de la gouttière transversale. Quant aux noyaux, Hoffmann n'en trouve pas dans le *tronc* de l'organe cilié. Le *pied* de cet organe n'est pas représenté, pas même là où l'auteur figure la cavité annexe, figure 23. La couche interne, épithéliale, de cette cavité n'est pas mentionnée non plus. Le contenu de la cavité est dit cellulaire; mais les cellules séparées, représentées dans la figure 24, ne rendent pas la réalité.

Quant à la connection de cette cavité avec l'organe segmentaire, Hoffmann n'en trouve absolument pas trace. Il croit à cette connection, parce que Leydig a déclaré la formation ciliée « l'entonnoir des organes segmentaires », mais l'auteur n'entrevoit pas même comment la continuité pourrait s'établir.

Sur ce point nous sommes donc d'accord; ou plutôt, ce que Hoffmann suppose, mais ne saurait vérifier, nous disons qu'il n'existe pas du tout.

Le plus fameux adversaire de nos conclusions, d'abord sur le contenu des cavités annexes, puis surtout sur la séparation com-

plète entre cette cavité avec son « entonnoir » et l'organe segmentaire, c'est A.-G. Bourne [6, 7].

Dans ses *Contributions à l'anatomie des Hirudinées* [6], M. Bourne parle à diverses reprises de ces dilatations dans plusieurs genres d'Hirudinées.

Comme cet auteur en appelle souvent à ce qu'il a dit des dilatations dans un genre que nous n'avons pas eu la bonne fortune d'examiner suffisamment jusqu'ici, il est nécessaire de citer ces passages et la figure principale qui s'y rapporte.

Pontobdella. — P. 479, *ibid.* : « ... à l'entonnoir fait suite une » espèce de col, présentant un gros noyau dans la paroi, et une » lumière ciliée. Il s'ouvre dans une dilatation considérable; » les parois de cette dilatation consistent dans de nombreuses » cellules aplaties, et se montrent, de même que le col, par» tiellement recouvertes par un épithélium...

» La dilatation possède un contenu vraiment curieux; elle est » parfois fortement gonflée. Comme il est indiqué ci-dessus, et » qu'il est visible dans les figures 53 et 54 (la première est » reproduite ici, fig. 25), tout l'appareil, entonnoir et dilatation, » gît dans un sinus sanguin, dans lequel flottent librement des » cellules épithéliales cœlomiques, et le courant ciliaire charrie » de temps en temps des corpuscules dans l'entonnoir. Ceux-ci, » à ce qu'il paraît, ne peuvent passer plus loin et stationnent » dans la dilatation.

» Le contenu semble consister principalement en corpuscules » dégénérés ou macérés; il y a en outre un grand nombre de » filaments très délicats, qui tendent à prendre un arrangement » rayonnant par rapport aux agglomérations de corpuscules, ou » parfois à les relier ensemble. On les voit dans un mouvement » continuel de va et vient, lequel, je pense, est causé par le cou» rant ciliaire, et n'est nullement intrinsèque. Les filaments ont » un diamètre égal, sont extrêmement délicats, et parfois très » enchevêtrés; ils se colorent facilement par l'iodine. Ils sont » représentés, comme on les voit avec Hartnack n° XII à immer» sion, dans la figure 55 (*). Je pense que ces filaments sont

(*) Nous ne jugeons pas nécessaire de reproduire ce dessin.

» très probablement de nature fibrineuse, et sont formés de
» temps en temps dans le sang dans des conditions anormales.
» L'idée m'est venue que ce pourrait être des filaments de lep-
» tothrix, mais ils sont toujours présents, et jamais une autre
» forme de bactéries n'est visible, deux faits qui militent forte-
» ment contre cette idée. J'ai remarqué de semblables filaments
» dans les dilatations qui suivent les entonnoirs des *Nephelis*,
» *Clepsine* et *Hirudo*, mais nulle part leur développement n'est
» aussi grand que dans la *Pontobdella.* »

Puis, à la page 486, nous lisons au sujet de cette formation dans la *Clepsine :* « ... J'ai trouvé très facile de dessiner les
» entonnoirs d'après mes sections ; ils s'ouvrent dans le sinus
» central (fig. 22, reproduite ici fig. 26). A la suite du col de
» l'entonnoir il y a une dilatation qui correspond à celle qui est
» décrite plus haut dans la *Pontobdella*, et comme dans ce
» dernier genre elle est bourrée de corpuscules. »

Bourne passe ensuite aux « entonnoirs » des Gnathobdellides. Nous ne le suivrons pas, parce que cela ne se rapporte plus du tout à notre sujet.

On remarque que Bourne ne mentionne pas du tout le bourrelet terminal, *le pied*, de l'organe cilié, avec sa structure toute particulière, que nous avons décrite.

La figure 26, qui sans doute est fortement schématisée, n'est pas de nature à faire voir la forme curieuse de l'organe cilié des Glossiphonides. *Le pied* manque entièrement; les branches sont peu exactement rendues, en tout cas, pour un individu adulte ; la cavité annexe n'est pas rendue d'une manière intelligible ; le canal central n'aboutit nulle part : c'est un caecum !

Et le contenu de la cavité ? Nous en sommes réduits aux figures de la *Pontobdella*. Examinons-la, puisque Bourne dit que le contenu est de même nature que chez la *Clepsine*. Dans la figure 53 (reproduite ici, fig. 25), nous ne voyons que des filaments et des masses de corpuscules du sang (« filaments and masses of blood-corpuscles », *l. c.*, p. 505), ces figures rappellent de loin quelques-unes de nos préparations d'individus âgés, que nous avons décrites à l'occasion de la figure 18. Mais là encore la différence

est très marquée. Que ce sont des « corpuscules du sang », nous ne saurions l'admettre à cause de la coloration bien distincte que ces cellules de la cavité annexe ont prise dans des préparations. Nous en possédons depuis plusieurs années où « ces corpuscules » ont une couleur bleu foncé tirant sur le violet, tandis que les corpuscules vrais du sang sont faiblement colorés en rouge.

Un autre point capital dans la figure 52 (ici fig. 26, pl. III) est *la relation entre la cavité annexe et le nephridium.* Bourne, on le voit dans la figure 26, *neph*, place deux bouts de grosses cellules *contre* la cavité annexe. Dans ces cellules néphridiales il dessine un faible canal. Mais il a soin de terminer ce canal, ou plutôt de n'indiquer qu'une terminaison vague, *juste avant de le faire pénétrer dans la cavité annexe.* Est-ce ainsi qu'on prouve par des figures la continuité? Si M. Bourne avait vu mieux que cela, il aurait eu soin, croyons-nous, de le rendre avec plus de précision. Nous ne trouvons pas de terme pour désigner un pareil genre de de preuve (*).

Le fait est que la relation de continuité n'existe pas.

Le dernier article de Bourne, de 1893 [7], n'ajoute rien à ses preuves antérieures, même il se rétracte sur plusieurs points, qui néanmoins ne touchent pas à notre présent sujet (**).

Le dernier auteur qui tout récemment s'est occupé des organes ciliés et des cavités annexes chez les *Glossiphonides* (*Clepsines*) est R. Leuckart [13]. Cet article, sans figures, traite des corpuscules qui accompagnent l'*entonnoir* dans les diverses espèces (*Hirudo, Nephelis, Clepsine*). Puis l'auteur s'occupe spécialement des Clepsinides.

L'*entonnoir* (Einzeltrichter), dit-il, est toujours unique, mais variant de forme, même chez une même espèce.

(*) La *seule* fois que Bourne a hasardé un dessin net de la continuité entre la cavité annexe et le néphridium, est la figure 25, planche III. Cette figure provient de la *Pontobdella.* Au point *x* Bourne fait passer la paroi épithéliale de la cavité annexe dans la paroi d'un conduit néphridien. Est-ce là une représentation de la réalité objective? Nous ne l'avons pas encore pu contrôler, mais nous soupçonnons qu'il en est ici comme *des parois cellulaires du canal néphridien,* passant par deux fois *à l'intérieur* d'une autre cellule ! Voyez le travail de Bourne [7] et notre réponse citée dans la note suivante.

(**) Voyez H. Bolsius, S. J., *Anat. Anzeiger*, 1894, IX Bd, Nr. 12.

L'auteur a-t-il eu peut-être sous les yeux l'organe cilié à différents âges, comme nous les figurons ici ? Il ne le dit pas. Il trouve en règle générale deux branches, tantôt plus longues, tantôt plus courtes, et dans ce dernier cas, dit-il, échancrées au bord.

C'est un fait que ces échancrures existent aussi là où les branches sont très longues : voyez notre figure 7, par exemple.

La *Glossiphonia tessellata* (ou *tessulata*), à laquelle l'auteur prête *quatre* branches, pourvues chacune d'un noyau, en possède pour nous deux seulement, comme toutes les autres espèces.

Leuckart mentionne explicitement la portion renflée du pied de l'organe cilié; mais il la décrit d'une façon contraire aux faits.

Le pied, d'après lui, s'étendrait au loin sur la face intérieure de la cavité, et ce revêtement serait mince et pourvu de vaisseaux.

Qu'on veuille comparer nos figures, et on y découvrira que le pied est très massif, s'étend peu, et ne contient absolument pas de vaisseaux.

La cavité annexe, pour Leuckart, est toujours plongée dans la substance du corps. Il n'a donc jamais vu de ces cavités entièrement proéminentes dans la cavité périviscérale, comme nous en représentons, par exemple, dans les figures 10 et 11, A, B.

Quant à ce que Leuckart écrit sur les cellules déjà décrites par O. Schultze comme étant des cellules néphridiales, sur les faibles vaisseaux qui parcourent ces cellules, — et sur bien d'autres détails encore, relevés à la page 329, *l. c.*, — nous avouons franchement ne pas pouvoir nous représenter ce que l'auteur veut indiquer par tout cela, et nous regrettons vivement l'absence de toute figure dans l'écrit du savant professeur.

CONCLUSIONS (*).

I. Il y a pas de continuité entre l'*organe cilié* (l'*entonnoir* des auteurs) et le nephridium, vu que dans la *cavité annexe* (la *dilatation* de quelques auteurs) l'organe cilié est terminé par une dilatation de forme spéciale.

II. Cette dilatation, *le pied,* est revêtu de l'épithélium de la cavité annexe jusqu'à l'endroit où surgissent les cils vibratiles.

III. La *cavité annexe* n'est pas en communication avec le nephridium, vu que cette cavité est close de toute part, excepté à l'entrée de l'organe cilié.

IV. *Le contenu* de la cavité consiste en vraies cellules.

V. Ces cellules diffèrent en nombre et en aspect à des époques diverses.

VI. Au dernier stade ces cellules se vident, et gardent le noyau seul aplati contre la membrane, comme c'est le cas pour les cellules mucipares (**).

P. S. C'est seulement après la déposition de ce mémoire que nous avons pu prendre connaissance de l'ouvrage de M. P. Leuckart : « *Die Parasiten des Menschen* », 2e édit., t. I, fasc., 5. La question des Hirudinées y est traitée amplement, et les « entonnoirs » *en relation avec* les *nephridia* y sont figurés et décrits assez au long. Ne pouvant pas remanier tout notre mémoire pour insérer les points de divergence entre les idées de Leuckart et les nôtres, ni ajouter à nos planches les figures intéressantes du dit ouvrage, nous nous contenterons pour le moment de constater que, dans les Glossiphonides, Leuckart admet de vrais entonnoirs en communication directe avec les *nephridia*. Nous espérons revenir bientôt sur l'intéressant ouvrage du savant de Leipzig.

(*) Nous n'indiquons ici que les conclusions les plus importantes et qui portent sur les points les plus controversés.

(**) Nous ne savons pas si les *mêmes* cellules se rajeunissent plus tard, ou si d'*autres* leur succèdent.

EXPLICATION DES FIGURES (*).

Explication des abréviations communes à la plupart des figures.

CA, cavité annexe. — *CP*, cavité périviscérale. — *OC*, organe cilié. — *tc*, tissu conjonctif.

br, branche
tr, tronc
p, pied
cc, canal central
cv, cils vibratiles
gl, gouttière longitudinale
gt, gouttière transversale

} de l'organe cilié.

Planche I, figure 1. — Tronçon antérieur de *Glossiphonia complanata*, coupé à plat. Gross. $a_3 \times$ oc. 4 Zeiss ($= \pm 50$ lin.).

Tr, trompe.
T, testicules.
ae, anneaux externes.

Figure 2. — Tronçon postérieur de *Glossiphonia complanata*, coupé à plat. Gross. $a_3 \times$ oc. 4 Zeiss ($= \pm 50$ lin.).

Cae, caecums intestinaux.
x, centre de la courbure qui terminerait la circonférence de la partie postérieure.

Figure 3. — Coupe presque axiale d'un organe cilié complet avec sa cavité annexe. Gross. DD × oc. comp. 4 ($= \pm 250$ lin.).

Figure 4. — Schéma de l'organe cilié des *Glossiphonides* adultes.

A. Vue de côté, un peu d'en haut, de tout l'organe.
B. Vue d'en haut.
C. Coupe transversale d'une branche.
D. Coupe transversale du tronc.

Remarque. — *Les cils vibratiles ne sont pas dessinés ici pour ne pas obscurcir les contours.*

(*) Dans plusieurs figures, il y a des détails indiqués en pointillé. Ce sont des accessoires qui ne touchent pas à la question principale pour laquelle telle ou telle figure est faite.

Figure 5. — Coupe axiale d'un organe cilié à moitié adulte. Gross. apochrom. à sec $\frac{3.0}{0.95}$ × oc. c. 4 (= ± 330 lin.).

Figure 6. — Le pied d'un organe cilié, vu du côté de la cavité annexe. Gross. DD × oc. c. 4 (= ± 420 lin.).

Figure 7. — Organe cilié, en relief, excepté le pied. La branche br_2 a été enlevée par le rasoir. Gross. DD × oc. c. 4 (= ± 250 lin.).

Figure 8. — Trois coupes successives d'un organe cilié de *Glossiphonia bioculata*. Gross. apochr. à sec × oc. c. 4 (= ± 330 lin.).

Planche II, figure 9. — Coupe axiale d'un organe cilié, transversale aux branches. Gross. immers. à l'eau H × oc. c. 4 (= ± 430 lin.).

Figure 10. — Cinq coupes successives, transversales, de l'organe cilié de *Glossiphonia (Hemiclepsis) tessulata*. Gross. apochr. à sec × oc. c. 4 (= 330 lin.).

Figure 11. — Deux coupes dans la partie postérieure de *Glossiphonia (Hemiclepsis) marginata*. Gross. apochr. à sec × oc. c. 4 (= ± 330).

Remarque. — *La coupe* A *de l'organe cilié est axiale.*

Figure 12. — Schéma de l'organe cilié des *Glossiphonides* jeunes.
A. Vu de côté.
B. Vu d'en haut.

Figure 13. — Trois coupes transversales du sommet d'un organe cilié jeune de *Glossiphonia complanata*. Gross. apochr. à sec × oc. c. 8 (= ± 660 lin.).

Figure 14. — Trois coupes transversales d'un organe cilié jeune de *Glossiphonia hyalina*. Gross. apochr. à sec × oc. c. 4 (= ± 330 lin.).

Figure 15. — Coupe transversale de la cavité annexe. Gross. apochr. à sec × oc. c. 2 (= ± 166 lin.).

Remarque. — *Cette figure contient les détails du revêtement interne épithélial,* ep, *et de la situation de la cavité annexe par rapport aux organes voisins.*

Figure 16. — Coupe à travers une cavité annexe de *jeune* Glossiphonide. Gross. apochr. à sec × oc. c. 4 (= ± 330 lin.).

Remarque. — *La cavité contient des cellules très grandes et peu nombreuses.*

Figure 17. — Coupe à travers une cavité annexe de Glossiphonide *adulte*.

Remarque. — *La cavité est bourrée de cellules parfaites.*

Figure 18. — Coupe à travers une cavité annexe de Glossiphonide après la ponte.

Remarque. — *Toutes les cellules, à l'exception d'un petit nombre, sont vides, et le noyau est aplati contre la membrane.*

Planche III, figure 19. — Dix coupes, contenant *toutes* une cavité annexe. Gross. apochr. à sec × oc. c. 4 (= ± 330 lin.).

Remarque. — *La* seule *ouverture de la paroi est dans la coupe VI, où se trouve le pied,* p, *de l'organe cilié. Partout ailleurs la paroi de la cavité est* close *et ne communique pas avec l'organe segmentaire.*

Figure 20. — Reproduction de la figure 2 du mémoire de Fr. Leydig [1].

Figure 21. — Reproduction de la figure 203 du livre de Fr. Leydig [2].

Figures 22, 23, 24. — Reproduction des figures du mémoire de C.-K. Hoffmann [8].

Remarque. — *Ces trois figures sont des réductions des figures originales, dans la proportion de 1 à 2 pour la figure 22, et de 2 à 3 pour les autres.*

Figure 25. — Reproduction de la figure 53, planche XXXI du mémoire de Bourne [6].

Figure 26. — Reproduction de la figure 52, même planche, même mémoire.

Pla

cv
Tr
br
n
tc
cv

p
CA
cc
tr
br^2
br^1
gl
gl

fig 7

cc
n

fig. 6

A
br^1
gl
n^1
cv

B
br^1
cv
n^1
gl
br^2

C

C
tr
gl
cv
p
tc
CA
n^2

D

a

fig. 8

H B

Lith. F. Giele, Louvain.

TABLE DES MATIÈRES

DISCUSSION

SUR

L'ENSEIGNEMENT DES SCIENCES NATURELLES

DANS LES COLLÈGES

(4 ET 5 AVRIL 1894) (*)

I

M. l'abbé Wouters admet que, dans les études humanitaires, la place principale revient aux études classiques, et que celles-ci doivent être regardées comme la base et le fondement d'une culture intellectuelle sérieuse; mais il est d'avis que l'étude des sciences naturelles peut être dirigée vers le même but que les études littéraires, et qu'elle peut même contribuer puissamment à le faire atteindre.

I. Le but principal des humanités est le développement rationnel et méthodique de *toutes* les facultés du jeune homme. Or, une des principales facultés de l'âme est l'esprit d'*observation.*

Les études *purement* classiques ne consacrent pas à cette partie très importante du développement intellectuel tous les soins qu'elle réclame. L'étude des sciences naturelles est la principale école de l'induction logique. Dans les sciences naturelles,

(*) Voir *Première partie*, pp. 142-143 et 147. Les deux communications de M. Thiébauld ne nous sont pas parvenues. Voir aussi, dans le tome XVII des *Annales*, 1re partie, pp. 124-130, 130-131, et tome XVIII, 1re partie, pp. 77-85, sur la question de l'enseignement des sciences naturelles, le résumé des discussions antérieures qui ont eu lieu les 12 et 13 avril 1893 et le 25 janvier 1894.

ce n'est qu'après avoir établi, par une observation attentive et continue, un nombre considérable de faits particuliers, qu'on est autorisé à les embrasser, par induction, dans une formule générale. Mais ce n'est pas seulement la faculté d'observation que l'étude des sciences naturelles développe mieux que toute autre, elle contribue non moins puissamment à la culture de toutes les facultés intellectuelles. En s'habituant à saisir la logique des faits, on s'exerce, en effet, à découvrir la logique des idées, et ainsi s'acquiert la sûreté dans le raisonnement, la rectitude dans le jugement.

II. L'éducateur chrétien doit voir dans les humanités un moyen de *formation religieuse et morale*. L'étude des sciences, dit Mgr Dupanloup, développe, chez quiconque s'y applique, les qualités les plus solides, les plus précieuses. Quand ce sont les œuvres mêmes de Dieu qu'on étudie, l'objet de l'étude est divin et fait toucher à l'infini.

De nos jours, la plupart des objections contre la religion sont tirées des sciences naturelles. Il est donc nécessaire que les élèves possèdent à la fin de leurs humanités un bagage scientifique tel qu'ils soient du moins en état de comprendre les objections qu'ils ne manqueront pas de rencontrer, et d'en chercher la réfutation s'ils ne sont pas en état de la donner immédiatement. On doit leur signaler les objections les plus répandues, pour que plus tard, lorsqu'ils les entendront formuler, ils ne concluent pas de notre silence à la faiblesse de nos arguments, et ne commencent même à douter de la vérité de nos doctrines : *Tela praevisa minus feriunt*. Il faut enfin qu'ils aient acquis la conviction inébranlable que toute contradiction entre la science et la foi est impossible.

III. Les humanités doivent aussi servir de préparation immédiate aux études supérieures, et à ce point de vue encore l'enseignement des sciences naturelles (et spécialement des éléments de la chimie générale) s'impose. J'affirme, dit M. Schwartz, sans crainte d'être contredit, qu'il est matériellement impossible d'enseigner en un an ce qu'un médecin ou un ingénieur doit savoir de chimie, *surtout s'il faut commencer par les rudiments*.

Les élèves qui, au sortir de la rhétorique, entrent, sans préparation aucune, dans un cours de chimie à l'université, y sont absolument dépaysés et perdent le fruit d'un grand nombre de leçons, parce que la langue chimique qu'on y parle leur est totalement étrangère. Les jeunes humanistes doivent donc arriver à l'université initiés, sinon aux faits, tout au moins aux méthodes et à l'esprit scientifique, et surtout à la terminologie de la nomenclature chimique.

IV. La connaissance des notions élémentaires des sciences naturelles n'est pas moins indispensable à ceux qui se destinent au droit, aux lettres, etc. C'est même de ceux-ci qu'il faudrait, avant tout, s'occuper dans les humanités, car les seules notions de sciences qui leur seront enseignées le seront au collège.

Nous vivons, de nos jours, dans une atmosphère de sciences ; en ignorer à peu près complètement la marche et les progrès, c'est n'être plus de son temps. Jamais les publications scientifiques n'ont été aussi nombreuses ni aussi variées ; jamais les objections n'ont été plus abondamment répandues parmi le peuple. N'est-il pas profondément regrettable que tant d'hommes, d'ailleurs fort instruits, soient condamnés, par suite de cette grave lacune dans les humanités, à rester complètement étrangers à ce mouvement du progrès et à ces polémiques scientifiques ?

Dans ces derniers temps, les découvertes scientifiques ont révolutionné la face du monde et modifié totalement les relations internationales des peuples. Le devoir de la pédagogie est de suivre pas à pas ce mouvement intellectuel et de ne pas se laisser distancer par lui. Cela s'est fait dans la plupart des pays de l'Europe, de même qu'aux États-Unis.

V. Ce serait une erreur de croire que l'étude des sciences porte préjudice aux études littéraires. Bien plus, comme l'a si bien démontré M. Narcisse Gillet, dans un mémoire couronné au concours institué par l'arrêté ministériel du 12 juin 1883, l'étude des sciences naturelles fournit une ample moisson de sujets de rédaction, ainsi que les connaissances nécessaires pour les bien traiter ; par conséquent, loin de tarir les sources de l'inspiration littéraire, elle est d'un puissant secours pour

atteindre le but principal des humanités, c'est-à-dire la formation littéraire du jeune homme.

M. Wouters termine en émettant le vœu que *dans les colléges libres on consacre à l'étude des sciences naturelles une heure par semaine à partir de la quatrième latine.*

II

M. Degive. — En intervenant dans la discussion ouverte sur l'opportunité d'introduire l'enseignement des sciences naturelles dans les colléges, mon intention a été de combattre les idées émises à ce sujet par M. Mansion.

Contrairement à cet estimable collègue, et d'accord avec l'honorable inspecteur général de l'agriculture M. Proost, je pense que *l'étude des choses naturelles* devrait constituer un des objets essentiels de l'enseignement à tous les degrés. Au lieu de placer cet enseignement, comme le propose M. Mansion, à la fin des humanités et d'en faire l'objet d'une *septième classe dite scientifique*, je suis d'avis qu'il doit prendre une place importante dans le programme de chacune des classes de nos établissements d'enseignement moyen.

Le système actuel, défendu par M. Mansion, nous paraît en contradiction formelle avec l'ordre naturel des choses et partant avec les lois biologiques. Nous pensons que, pour être conforme à l'évolution naturelle de l'être humain, l'instruction et l'éducation de l'enfant doivent être faites de manière à maintenir un plus juste équilibre entre ses différentes facultés, à développer la faculté de penser ou le jugement par le procédé naturel de l'observation et de l'expérimentation ayant pour objet les faits extérieurs (observation externe) et les faits intérieurs (observation interne).

On sait combien l'éducation actuelle laisse à désirer sous le rapport de l'équilibre entre les différentes parties de l'être humain. On sait à quel point est exagéré le travail cérébral présentement exigé des enfants et à quelles déplorables déchéances

cet abus fonctionnel donne lieu. On semble tout à fait perdre de vue que, pour s'exercer dans toute leur extension et avec toute leur énergie, les facultés intellectuelles exigent le secours d'organes suffisamment et régulièrement développés.

Les conséquences du surmenage intellectuel sont d'autant plus funestes qu'elles s'ajoutent à celles qui résultent de la façon anormale dont la mémoire et l'imagination sont cultivées, au détriment de la réflexion, ainsi que du genre de vie actuel qui, par son caractère généralement efféminé, pousse à un développement outré des organes et des facultés sensitifs au détriment de la motilité et de la volonté.

De cette double rupture d'équilibre entre les facultés intellectuelles et les facultés organiques d'une part, entre la sensibilité, l'imagination et la spontanéité, le jugement d'autre part, résulte le nombre toujours croissant de ces natures nerveuses, exaltées, mal équilibrées, sans consistance, prédisposées à toutes les déviations aussi bien d'ordre moral que d'ordre physique.

Pour remédier à ce grave état de choses, quelques réformes de facile application nous paraissent s'imposer : la réduction des programmes, — une meilleure répartition des vacances, — la réduction ou la suppression des purs exercices de mémoire, ainsi que des thèmes latins et grecs, — le choix de meilleures méthodes d'enseignement.

Les programmes sont aujourd'hui chargés d'éléments peu importants qu'on pourrait retrancher sans le moindre inconvénient. Mieux vaut apprendre convenablement un nombre limité de choses essentielles que d'assimiler superficiellement un grand nombre de matières de minime intérêt. *Non multa, sed multum.*

Afin de prévenir le surcroît de travail nécessité par les oublis qu'entraîne un repos trop prolongé, il nous semble qu'il serait sage de diminuer la durée des grandes vacances, d'allonger dans une certaine proportion les petites, de multiplier les jours et les demi-jours de congé, surtout en été.

Des exercices gymnastiques rationnels, combinés de façon *à activer et à régulariser le travail nutritif dans toutes les parties du corps* et spécialement dans le vaste système musculaire,

auraient pour résultat, non seulement d'équilibrer les effets du travail cérébral, mais encore de contre-balancer les conséquences de la vie sensuelle et énervante de l'époque actuelle. Trois séances au moins par semaine, rendues *obligatoires* pour les élèves de toutes les classes, nous paraissent nécessaires pour atteindre le résultat voulu.

Il n'est pas douteux que les méthodes usitées aujourd'hui pour l'enseignement de diverses branches, notamment pour celui des langues étrangères, laissent notablement à désirer, et qu'il en existe de meilleures, à l'aide desquelles il serait facile d'apprendre, en un temps beaucoup plus court, le latin, le grec, l'allemand et l'anglais.

Si, jusqu'à ce jour, on a généralement fait fi des méthodes faciles pour l'étude du latin et du grec, c'est que l'on a voulu faire de cette étude une *gymnastique intellectuelle*. Selon M. Mansion, « on n'enseigne pas aux élèves des collèges le grec et le latin pour leur faire lire, écrire ou parler ces deux langues, mais pour développer leurs facultés, pour leur apprendre à analyser la pensée d'autrui et à exprimer leur propre pensée dans leur langue maternelle. »

Sans vouloir dénier à pareil travail toute action utile, notre avis est qu'au double point de vue de l'*alimentation* et de la *gymnastique* intellectuelles, l'étude de la nature combinée à celle de la langue maternelle produirait des résultats de beaucoup plus avantageux.

Peut-on sérieusement mettre en parallèle ces deux procédés de formation intellectuelle : l'analyse, la traduction de la pensée humaine formulée, cristallisée en quelque sorte dans les symboles froids et artificiels de l'écriture, et l'analyse, la traduction de la pensée divine, tracée en caractères vibrants et lumineux dans les êtres et les choses qui composent l'univers? Est-il permis de prétendre que l'étude de la nature, que l'étude de la *langue divine*, de la seule *langue réellement vivante*, soit aussi difficile et aussi aride que veut bien le dire M. Mansion? Le *livre de la nature* n'est-il pas ouvert à tous les yeux et mis à la portée de toutes les intelligences, depuis la plus simple, celle de l'enfant, jusqu'à la plus élevée, celle du philosophe?

Notre âme n'a-t-elle pas été pourvue, pour déchiffrer ce livre, de six organes spéciaux, auxquels correspondent autant de facultés : la vue, l'ouïe, l'odorat, le goût, le tact et la motilité, qui constituent autant de voies, autant de moyens de correspondance entre elle et le monde extérieur?

Placée au confluent de ces différentes voies, l'âme reçoit par leur intermédiaire les diverses impressions causées par les objets extérieurs ; ayant conscience de ces impressions, elle les compare, constate leurs ressemblances et leurs différences et arrive ainsi à distinguer la série des faits ou attributs élémentaires, irréductibles, en lesquels toute réalité naturelle peut être décomposée, et qui constituent en quelque sorte les lettres de l'alphabet naturel ou universel : forme, couleur, volume, largeur, épaisseur, température, consistance, etc.

Après avoir pris connaissance des attributs élémentaires de la chose considérée, l'esprit en opère la synthèse ; par la combinaison et la coordination des caractères élémentaires ou alphabétiques, il compose les mots, les propositions, les chapitres, les volumes, autrement dit les réalités et les phénomènes plus ou moins complexes qui, par leur réunion, forment le *livre de vie*, le *divin poème* de la nature.

C'est par la gymnastique qu'elle effectue sur les faits qui lui sont fournis par la nature et qu'elle trouve en elle-même, par les réflexions, les raisonnements auxquels elle soumet ces faits, que l'intelligence acquiert peu à peu le développement et la puissance qui constituent le vrai *penseur*.

Or, la force du *penseur*, et partant celle du *littérateur*, étant en raison de la profondeur et de l'étendue de sa connaissance des êtres et des choses, ne va-t-il pas de soi qu'un des objets les plus essentiels de l'enseignement à tous ses degrés, tant primaire que moyen et supérieur, doit être d'initier les esprits à effectuer d'une manière méthodique et de plus en plus approfondie ce qu'ils ont fait naturellement et spontanément dans le premier âge, à l'école maternelle, c'est-à-dire observer, analyser, interpréter les réalités et les phénomènes de la nature?

Si c'est dans les *choses*, dans les *manifestations* et les *phéno-*

mènes naturels que l'enfant puise ses premières *idées*, si c'est par ces *choses* et ces *faits* que son intelligence est éveillée, qu'elle apprend à *juger*, autrement dit à *penser*, à *raisonner*, n'est-il pas élémentaire que le développement ultérieur et le perfectionnement de cette intelligence ne peut se faire d'une manière plus logique et plus efficace que par la continuation du même système, par l'emploi de la *méthode naturelle* ou *physiologique?*

A l'appui du système opposé, de la formation intellectuelle par l'étude des langues anciennes, M. Mansion signale que son emploi a suffi pour former les grands esprits qui depuis Galilée jusqu'à Pasteur ont élevé l'édifice des sciences modernes. On peut répondre, avec M. Proost, que ces esprits, grâce à leur puissance innée, ont acquis leur haut développement *malgré* et non *par* la méthode dont il s'agit. *Cum hoc sed non propter hoc.*

L'opposition qui est faite à l'introduction de l'*étude de la nature* comme branche fondamentale dans le programme de l'enseignement moyen, se comprend jusqu'à un certain point lorsque l'on considère la manière défectueuse dont elle a été organisée dans divers pays, notamment en France et en Allemagne.

Au lieu d'imposer à la jeunesse l'assimilation de la somme écrasante des détails que comporte l'étude particulière de tous les êtres et de toutes les choses qui figurent aux programmes élaborés dans ces pays, nous voudrions que l'enseignement des choses naturelles eût un caractère essentiellement général, qu'il eût particulièrement en vue la connaissance des êtres et des choses par leurs caractères généraux, par leurs attributs communs.

Afin de donner à cet enseignement toute l'efficacité désirable, il serait de la plus haute utilité, à mon avis, d'adopter un même plan général pour chaque classe d'êtres envisagés.

Partant de cette définition axiomatique que toute réalité naturelle constitue une *chose* (*être*) organisée d'une *certaine manière* (forme) pour répondre à une *fonction*, à une *fin* déterminée (*conformité*), on pourrait, dans l'étude d'une chose ou d'un être quelconque, considérer successivement :

1° Sa *manière* d'être à l'état statique ou *anatomique*, traduite par ses caractères physiques, organoleptiques et chimiques;

2° Sa *manière* d'être à l'état *dynamique* ou *fonctionnel*, exprimée par ses *changements* ou *phénomènes organiques* (formation, destruction, transformation) ou *fonctionnels proprement dits*, distingués en *physiques* (mouvements, tensions, sons) et en *psychiques* (perceptions, idées, — affections, sentiments, — actions, volitions) ;

3° Les *facteurs* et les *conditions* (internes et externes) qui sont favorables ou défavorables à la production desdits changements ;

4° Sa *conformité* d'être, c'est-à-dire la convenance qui existe entre sa manière d'être et sa fonction ou destination.

Sous ce dernier rapport, celui de la *conformité*, toute chose, soit à l'état statique, soit à l'état dynamique (effet ou cause), serait vue sous deux modes généraux : le mode *conforme* ou *normal*, caractérisé par l'ordre, l'harmonie, la proportion, et le mode *disconforme* ou *anormal*, traduit par le désordre, le désaccord, la disproportion.

Dans la conformité ou concordance des choses, on montrerait la raison : 1° de ce qui les rend utiles ou nuisibles, bonnes ou mauvaises, agréables ou désagréables, belles ou laides, aimables ou haïssables ; 2° de ce qui tend, soit à les rapprocher, les unir, les combiner, les conserver (*sympathie*) ; soit à les détruire, les décomposer, les désunir, les écarter (*antipathie*).

Dans la même *conformité d'être*, conçue par l'intelligence (*idée*), on verrait le *vrai* ; — sentie par le cœur (*sentiment*), on trouverait les différentes formes de la *satisfaction* (agréable, beau, plaisir, joie) ; — réalisée par la volonté (*acte*), on rencontrerait le *bien*.

Tel est, dans ses grandes lignes, le plan suivant lequel les jeunes intelligences pourraient utilement, selon moi, être initiées à la connaissance de la nature.

Il va sans dire que cet enseignement des choses, pour porter ses fruits, devrait être méthodiquement gradué et mis en rapport avec l'état des esprits auxquels il est destiné. Élémentaire, superficiel et plus ou moins empirique d'abord, il deviendrait ensuite de plus en plus profond, rationnel, scientifique, à mesure que

l'intelligence, en se développant, prend un discernement plus large et une plus grande force de jugement.

Après avoir consacré, pendant cinq années, plusieurs heures par semaine à l'enseignement des divers ordres d'êtres ou de choses naturelles, il nous semble, ainsi qu'à Jules Simon, Alfred Fouillée et autres auteurs, qu'il conviendrait de donner, la dernière année, un cours de *science générale*, autrement dit de *philosophie naturelle*. Ce dernier enseignement formerait l'utile complément, serait comme la synthèse et le couronnement des études scientifiques spéciales faites les années précédentes. Il montrerait les faits et les principes universels qui forment le noyau ou le centre lumineux dont les sciences particulières ne sont que des émanations ou des rayons spéciaux.

Mais l'homme ne doit pas seulement posséder le savoir ou la vérité, être doué de la puissance d'analyser, de synthétiser et d'interpréter les choses, il doit en outre être à même de traduire ses pensées et de comprendre celles des autres; il arrive à ce dernier résultat par la culture des langues, et particulièrement de sa *langue maternelle*. A l'art de penser il doit unir l'art d'exprimer sa pensée par la parole et l'écriture. On ne considère pas assez, selon nous, que pour devenir grand orateur ou grand écrivain, il est indispensable d'être pourvu d'un haut savoir, d'une science profonde et étendue.

En même temps qu'il assimile des *idées* par le moyen des *faits* d'observation, l'esprit doit acquérir la connaissance des *mots* qui servent à les exprimer, de la langue qui doit les véhiculer.

La meilleure manière d'enseigner la langue maternelle, à notre sens, consiste à montrer les *choses* dans lesquelles sont incarnées à l'état naturel les *idées* dont les *mots* doivent former une représentation artificielle. L'enseignement de cette langue, comme celui de toute autre matière, doit être aussi objectif, aussi intuitif que possible. Un des grands défauts de l'enseignement actuel, c'est d'apprendre les mots ou la langue avant de connaître les choses qu'ils servent à désigner. L'étude simultanée et parallèle de la langue maternelle et des choses naturelles peut seule porter remède à cette anomalie.

Le temps consacré aujourd'hui à l'étude de la langue maternelle ne nous paraît pas suffisant. Celle-ci devrait être étudiée d'une manière plus méthodique. Les sujets des compositions écrites devraient être choisis parmi des matières dont l'élève possède une connaissance suffisante.

Sous ce rapport, l'étude de la nature offrirait une précieuse ressource; le maître n'aurait que l'embarras du choix parmi les êtres et les choses étudiés scientifiquement pour fournir aux élèves des thèmes intéressants de descriptions, de narrations, de dissertations.

Afin de procéder méthodiquement, les élèves devraient d'abord être exercés à des compositions simples, peu étendues, pour lesquelles on exigerait particulièrement la correction et la clarté. Après leur avoir appris l'art d'écrire correctement, on leur enseignerait celui d'écrire bellement.

Grâce à la connaissance qu'il aurait acquise des êtres et des choses, de leurs analogies ou ressemblances, de leurs contrastes ou différences, l'élève disposerait de tous les éléments voulus pour concevoir les comparaisons et trouver les métaphores les plus propres à rehausser l'éclat et la vigueur du verbe écrit.

La lecture attentive et fréquente des auteurs qui ont le mieux écrit dans la langue maternelle, la lecture non moins attentive et soutenue du poème écrit par le suprême Auteur constituent, à notre avis, les deux moyens les plus puissants de s'initier à l'art d'écrire et de penser.

L'enseignement moyen, complément de l'instruction primaire, ayant pour but la formation générale, le développement et le perfectionnement des facultés mentales, nous pensons qu'il conviendrait de lui donner un caractère aussi général, aussi peu spécialisé que possible. La bifurcation imposée par les diverses exigences professionnelles devrait se faire le plus tard possible; elle ne devrait pas avoir lieu avant la quatrième année d'études moyennes.

L'enseignement du latin et du grec, complément utile, mais non indispensable, de la formation intellectuelle générale, pourrait se faire durant les trois dernières années de collège; il

serait donné d'une façon très développée pour ceux qui ont intérêt à bien connaître ces deux langues, d'une manière très succincte pour tous les autres, afin de leur inculquer les notions nécessaires à la compréhension de l'étymologie et de la structure des mots français dérivés de ces deux langues. Il ne peut être contesté qu'avec une bonne méthode le grec et le latin peuvent être facilement appris en trois années.

Si ce temps était jugé insuffisant pour les professions ecclésiastiques, rien n'empêcherait d'en continuer ultérieurement l'étude pendant les deux années consacrées à la philosophie.

Telles sont, Messieurs, les modifications qu'il serait utile et urgent, selon M. Proost et moi, d'apporter à l'enseignement. Ces modifications visent un double but : une formation intellectuelle sérieuse, à la fois fondamentale, scientifique et littéraire, et un développement corporel ou organique suffisant.

Pour atteindre la première, nous proposons :

1° De prendre comme base l'étude simultanée et parallèle de la nature et de la langue maternelle ;

2° De compléter l'enseignement des sciences naturelles par un cours de *philosophie naturelle ;*

3° De ne bifurquer l'enseignement moyen qu'à partir de la quatrième année d'études.

Pour réaliser le second, nous préconisons :

1° D'instituer des exercices obligatoires de gymnastique rationnelle ;

2° De régler les études de manière à prévenir tout surmenage intellectuel. Nous avons indiqué comme pouvant contribuer à produire ce dernier résultat : la réduction des programmes, — la réduction ou la suppression des exercices de mémoire ainsi que des thèmes latins et grecs, — une meilleure répartition des vacances, — l'emploi de meilleures méthodes d'enseignement.

Le but des études moyennes, qui est de contribuer à former des hommes (d'où leur nom d'*humanités*) aussi parfaits et aussi utiles que possible, n'étant aujourd'hui réalisé que d'une manière très incomplète et très défectueuse, nous avons cherché de quelle façon elles pourraient être améliorées. Le système que nous préco-

nisons nous paraît de nature à obvier aux principaux inconvénients du régime actuel. Il offre sur ce dernier l'immense avantage de procurer à tous ceux qui, pour diverses raisons, ne font pas d'autres études ou n'abordent pas les études *scientifiques* supérieures, tels que les ecclésiastiques, les avocats, etc., de procurer, dis-je, une somme de connaissances suffisante pour leur permettre — de *discerner*, par l'intelligence, — de *goûter*, par le cœur, — de *réaliser*, par la volonté, ces trois éléments essentiels, nécessaires à la vie et à l'ascension des âmes, le vrai, le beau et le bien.

III

M. Mansion défend les vues qu'il a exposées antérieurement et y ajoute quelques considérations nouvelles. Voici le résumé de sa communication.

1. Sur la question pédagogique et, en particulier, sur la question du surmenage, M. Mansion admet la thèse générale de M. Proost. Les éducateurs doivent tenir compte, dans une juste mesure, de la nature physique de l'enfant et de l'adolescent, sous peine de nuire à son développement intellectuel et moral.

2. Mais l'accord sur cette thèse générale n'entraîne pas l'adhésion au programme proposé par MM. Proost et Degive. Il est clair, en effet, qu'on peut surmener les enfants et violer les lois naturelles de l'éducation, aussi bien en leur enseignant les sciences de la nature d'après le nouveau programme, qu'en suivant le programme traditionnel des humanités.

3. Dans les collèges catholiques, les humanités ne comportent que six années. On y enseigne le français, le flamand (ou l'allemand), le latin, le grec, les mathématiques élémentaires, l'histoire, la géographie et des notions de physique.

Dans la section gréco-latine des athénées, les études durent sept ans. Outre les branches citées plus haut, on y enseigne la botanique et la zoologie (en 3e et en 4e), les éléments de physique et des notions de chimie (en poésie et en rhétorique).

M. Mansion ne pense pas qu'il soit possible d'introduire les sciences naturelles dans l'enseignement des collèges catholiques, à moins de créer une septième année d'études.

Si on ne la crée pas, si on ajoute simplement les cours d'histoire naturelle au programme actuel, comme le veut M. l'abbé Wouters, ou bien l'on surmènera les élèves, ou bien le nouvel enseignement sera illusoire, ou enfin il nuira aux vraies études d'humanités, en éparpillant sur trop d'objets l'attention et les efforts des élèves.

4. Selon lui, la vraie place de l'enseignement des sciences naturelles est dans une année spéciale, après la rhétorique. Alors les facultés des jeunes gens moyennement doués au point de vue de l'intelligence et de la volonté ont été suffisamment développées et d'une manière harmonique par l'enseignement des langues (anciennes et modernes) et des éléments de mathématiques. Ces deux enseignements, complémentaires l'un de l'autre, ont d'ailleurs donné à l'étudiant l'occasion d'analyser : 1° à propos du grec et du latin, les idées morales qui sont depuis des siècles le patrimoine de l'humanité; 2° à propos des mathématiques, les idées de nombre, de forme, de mouvement, sans lesquelles on ne pénètre pas sérieusement dans l'étude de la nature.

5. Contrairement à M. l'abbé Wouters, M. Mansion ne croit pas que l'on puisse trouver dans les sciences naturelles des sujets de rédaction. L'idéal d'une rédaction, dans le domaine des sciences de la nature, c'est la description impersonnelle et froide pour laquelle Linné a créé une langue inexorablement précise, mais barbare et qui ne s'adresse qu'aux facultés inférieures de l'âme humaine.

6. D'une manière générale, l'étude des sciences naturelles, si loin qu'on la pousse, ne nous initie qu'aux idées relatives à la matière, comme le prouve d'ailleurs suffisamment la communication de M. Degive. Ce sont les études littéraires qui nous familiarisent avec les idées morales et nous révèlent l'évolution historique de l'humanité, mille fois plus importante pour l'homme que l'évolution de la matière organisée ou non.

7. Dans les classes élémentaires, l'enseignement intuitif des sciences naturelles ne développe pas plus l'esprit d'observation chez les enfants que ne le font les incidents les plus vulgaires de leur vie journalière. Cet enseignement intuitif des sciences naturelles prendrait d'ailleurs un temps énorme, si on voulait l'organiser sérieusement.

L'enseignement systématique des sciences naturelles dans ces mêmes classes, au contraire, s'adresse forcément à la mémoire et produit *la crédulité scientifique*, si répandue aujourd'hui dans le monde de ceux qui n'ont pas étudié les sciences d'une manière approfondie.

L'enseignement élémentaire des mathématiques n'a pas ce dernier inconvénient, parce qu'une expérience de près d'un siècle prouve que cet enseignement peut être raisonné.

8. Il n'est pas si facile qu'on le croit communément de *lire*, comme on dit, dans le livre de la nature. Ce livre est écrit en caractères mathématiques, comme l'a fait observer Galilée, parce que Dieu a tout créé avec ordre, poids et mesure. Un enseignement élémentaire, mais sérieux de la physique et de la chimie présuppose chez ceux qui le reçoivent la connaissance des éléments des mathématiques ; la physique et la chimie elles-mêmes sont extrêmement utiles à ceux qui veulent dépasser, dans l'étude de la zoologie et de la botanique, la partie purement descriptive de ces deux sciences.

C'est pourquoi les sciences naturelles doivent être enseignées plutôt *après* que *pendant* les humanités, fût-ce même dans les classes supérieures.

9. Il y a d'ailleurs, au point de vue pédagogique, des inconvénients sérieux à enseigner simultanément des matières trop disparates. L'expérience prouve que les enfants et les adolescents ne peuvent pas, sans se surmener, étudier avec goût et succès un grand nombre de branches distinctes.

10. Mais, soit que l'on enseigne les sciences naturelles dans toutes les classes des colléges, en réduisant l'étude des langues anciennes à trois années, comme le veulent MM. Proost et Degive; soit qu'on admette la réforme plus modeste proposée par

M. l'abbé Wouters; soit que l'on crée après la rhétorique une classe nouvelle, comme le demande M. Mansion, pour les aspirants-médecins, celui-ci, pour les raisons données au n° 6, ne croit pas qu'en aucun cas l'enseignement des sciences naturelles ait une influence éducative analogue à celle des humanités.

11. M. Fouillée, dans son beau livre *L'Enseignement au point de vue national* (Paris, Hachette, 1891), a très bien expliqué pourquoi les humanités ont cette influence éducative, même sur la formation de l'esprit scientifique. « L'enseignement des sciences, même physiques et naturelles, développe surtout la mémoire et non le raisonnement inductif, l'esprit de spéculation et d'hypothèse qui sont précisément les grands ressorts de toute découverte (p. 72). » « On développe plus l'esprit scientifique, c'est-à-dire l'esprit d'induction, de recherche, de divination, d'hypothèse, d'observation, de tâtonnement, d'ingéniosité et de patience (la patience de Newton), par l'étude de la grammaire et des lettres que par l'étude des sciences. Oui, pour analyser une phrase et en bien saisir le sens, pour traduire soi-même sa pensée en des expressions qui ne la trahissent pas, surtout s'il s'agit d'une langue ancienne, il faut induire, observer, essayer et expérimenter, deviner, faire des suppositions et des hypothèses de toute sorte. Et cet exercice vous rendra plus semblable aux inventeurs du thermomètre ou du baromètre que si vous assistez de loin, sur le banc d'une classe, à la construction d'un thermomètre ou d'un baromètre (p. 76). » « On ne sait pas mieux observer *les hommes*, deviner et manier les caractères parce qu'on a reconnu la nature d'un terrain, distingué un morceau de quartz, appris toute sorte de noms savants, ou même fait des herborisations, compté le nombre des pétales d'une fleur. Apprendre à regarder au dehors, ce n'est pas apprendre à regarder au dedans. Un grand naturaliste peut être le plus naïf des hommes et des psychologues. C'est même l'ordinaire (p. 77). » « Les sciences séparées de l'esprit philosophique, dit Émile du Bois-Reymond, sont un rétrécissement de l'esprit et détruisent le sens de l'idéal (p. 80). »

12. Voici, dans le même sens, un autre témoignage non moins frappant. L'an dernier, la Faculté de médecine de Paris, consultée

par le Ministre de l'Instruction publique sur la question suivante : « Convient-il d'adopter le baccalauréat scientifique comme donnant accès aux études médicales? » répondait comme il suit, par l'organe de M. Potain, membre à la fois du corps professoral et de l'Académie de sciences : « Après avoir examiné le programme du baccalauréat moderne, après avoir discuté ses avantages et ses inconvénients, la commission s'est arrêtée aux conclusions suivantes :

» A l'unanimité, elle déclare que le programme d'études correspondant au baccalauréat moderne ne constitue pas, suivant elle, une préparation appropriée à l'étude de la médecine et qu'il ne convient pas de l'admettre comme y donnant accès... Pour le plus grand nombre de vos commissaires, le programme dont il s'agit présente, comme préparation aux études de médecine, un vice radical, qui est aussi, précisément, la caractéristique la plus accentuée de la forme qu'on propose. Je veux dire : la suppression absolue des langues anciennes.

» C'est une conviction profonde pour la plupart d'entre nous, que la connaissance de ces langues est indispensable au médecin et que *leur étude possède une vertu éducatrice qu'on ne saurait trouver*, à un degré semblable, dans aucune des parties de l'enseignement qu'on y voudrait substituer. »

Ni les langues modernes ni les sciences *naturelles*, *physiques* ou *mathématiques* ne peuvent remplacer les humanités « Je viens de dire ce qu'il semble bien qu'il faut penser en ce qui concerne les langues. Les sciences physiques et naturelles devant être étudiées à fond *à l'entrée* des études médicales (*), il n'est guère besoin que nos élèves à venir acquièrent à ce sujet, *pendant le cours de leur instruction secondaire*, autre chose que des données tout à fait sommaires (**). »

(*) C'est le système que nous défendons. (P. M.)

(**) Sur les avantages et les inconvénients de l'enseignement des mathématiques, M. Mansion renvoie à ce qu'il en a dit en 1876, à la Société scientifique (*Annales*, t. I, 1re partie, p. 867) : « Dans les collèges où les études ne durent que six ans, les mathématiques constituent la seule *science* qui puisse s'enseigner *scientifiquement*, par principes et raisonnement, non par voie d'autorité. Les mathématiques sont éminemment propres à

13. *Conclusions.* — Les conclusions de M. Mansion, d'accord avec les idées défendues par MM. Fouillée et Potain, sont les suivantes :

1° Il y a lieu de conserver, dans ses grandes lignes, l'enseignement actuel des humanités tel qu'il a été défini au n° 3, parce qu'il a une portée éducative très grande, même au point de vue scientifique (n°s 11 et 12); 2° l'enseignement des sciences physiques et naturelles peut s'introduire utilement dans une classe spéciale, après la rhétorique (n° 4), et seulement alors (n°s 3 et 8); 3° l'enseignement des sciences naturelles a une influence éducative d'une nature inférieure, à cause de son objet même (n°s 5, 6, 7 et 10); 4° par suite, le programme de MM. Degive et Proost est loin d'être préférable au programme actuel et surtout au programme actuel complété par la classe dont il est parlé au n° 2.

IV

M. Proost. — Pour répondre aux objections de M. Mansion, je me bornerai à résumer ou à préciser certains arguments que j'ai déjà fait valoir il y a près de vingt ans à cette tribune.

Si notre savant collègue avait relu ma conférence de 1876,

---

développer l'esprit de déduction logique et à *familiariser avec les idées de grandeur.* L'esprit de déduction logique est une faculté précieuse pour les futurs étudiants en droit et en théologie, sciences où l'on part de principes bien déterminés. Ensuite les idées de grandeur sont la base de toute étude scientifique de la nature: par conséquent, les mathématiques sont indispensables aux jeunes gens qui veulent devenir ingénieurs ou médecins. Pour tous les élèves de nos collèges, elles ont une portée formelle. *Mais on l'exagère souvent :* l'esprit de déduction logique est une faculté d'ordre beaucoup moins élevé que celle d'éprouver les principes que ne développe guère l'étude des mathématiques : un logicien n'est pas nécessairement un esprit critique, encore moins un penseur; *c'est souvent un utopiste.* D'autre part, les idées de grandeur sont les moins importantes de toutes nos idées; elles ne touchent pas d'assez près aux intérêts essentiels de l'humanité. »

Les résultats obtenus chez les Frères des écoles chrétiennes, dans les écoles moyennes de l'État en Belgique et dans les écoles primaires supérieures en France, prouvent d'ailleurs que la plupart des esprits moyennement doués peuvent s'assimiler un cours bien gradué d'éléments de mathématiques.

publiée deux années plus tard sous le titre : *L'enseignement des sciences naturelles dans les écoles primaires et moyennes*, il ne me prêterait certainement pas des opinions paradoxales que je n'ai jamais exprimées. Je le répète, il est facile de combattre une thèse en l'exagérant, de répondre à des *faits* par des affirmations *ex cathedra*. J'abandonne ce procédé de polémique à mes contradicteurs.

Les découvertes des sciences naturelles ont modifié peut-être plus profondément les conditions d'existence de l'humanité depuis un siècle que depuis trois mille ans. Notre patrimoine intellectuel s'est enrichi subitement d'un ordre nouveau de connaissances qui nous intéressent au plus haut point, puisqu'elles nous apprennent à dompter la nature, à nous diriger parmi ces formidables engrenages de l'univers où nos ancêtres étaient trop souvent broyés parce qu'ils y marchaient en aveugles.

Devant ces merveilleuses conquêtes, dues à la méthode expérimentale et à la méthode d'observation, dédaignées par les anciens philosophes et surtout par les pédagogues classiques, nous voyons s'atténuer de plus en plus et les préjugés séculaires qui séparaient les peuples, et les fléaux qui les décimaient, comme les famines et les épidémies.

Il y a six mois, en octobre dernier, un de mes savants collègues de la Faculté de médecine exposait magistralement à cette tribune les progrès admirables de la chirurgie et de l'hygiène qui permettent de supprimer la douleur et de disputer victorieusement à la mort d'innombrables existences humaines.

Ce n'est donc plus une hyperbole que de dire qu'une ère nouvelle s'ouvre pour l'humanité, et j'estime qu'il y va de l'honneur et de l'avenir de notre cause de ne pas entrer les derniers dans la carrière des réformes pédagogiques que ces découvertes nécessitent.

J'ai dit et je répète que les sciences naturelles constituent aujourd'hui, après la connaissance de la doctrine chrétienne, *la plus salutaire et la plus nécessaire de toutes les connaissances*, parce qu'elles nous apprennent à nous connaître et à connaître notre milieu, c'est-à-dire qu'elles réalisent précisément l'*idéal*

vainement poursuivi par les philosophes de l'antiquité : *Connais-toi toi-même.*

A ce point de vue, Pascal et Descartes l'ont proclamé avec raison, *c'est nous qui sommes les anciens,* car notre expérience et notre science sont l'œuvre des siècles, et c'est surtout *devant nous* qu'il importe de regarder, maintenant que la révélation naturelle, en nous découvrant des horizons sublimes, nous permet de mieux comprendre la pensée divine réalisée dans la création et d'utiliser ces connaissances positives pour dompter la nature et nous dompter nous-mêmes, pour assurer l'empire de l'*ange* sur la *bête.*

De même que M. le professeur Debaisieux s'est attaché dernièrement à faire ressortir les bienfaits de la science au point de vue *physique,* j'ai cherché à mettre en lumière les avantages immenses que peut retirer aujourd'hui la pédagogie des révélations de la *biologie* au point de vue intellectuel et moral.

Je me suis efforcé de prouver par des exemples que les maîtres les plus dévoués, les plus instruits au point de vue *littéraire,* marchent souvent à l'encontre du but qu'ils poursuivent, parce qu'ils ne sont pas initiés à ces révélations.

Qu'importe à l'homme de connaître les arts et d'approfondir l'étude des langues mortes ou des mathématiques, si l'équilibre de ses facultés vient à se rompre, si un surmenage inconscient compromet à jamais sa santé physique ou morale?

Or, j'affirme que ce surmenage existe, avec ses redoutables conséquences, surmenage que de nombreux et savants médecins ont signalé avant moi; et je crois faire œuvre philanthropique et chrétienne en proclamant cette vérité méconnue des pédagogues, dont l'attention est absorbée tout entière par l'étude d'un passé où *le culte de la forme,* l'étude des mots l'emportait nécessairement sur l'étude des phénomènes, puisque la nature était un temple fermé, une lettre morte pour les poètes et les lettrés, qui ne pénétraient point le sens des choses et s'arrêtaient nécessairement aux apparences.

Le programme des humanités dont s'est inspirée la Renaissance n'est-il pas celui de Rome et d'Athènes où l'on s'attachait surtout à former des rhéteurs, des esprits retors, des orateurs

capables de plaider à l'occasion le pour et le contre avec un égal talent, mais dont la vérité était le moindre souci?

C'est de ces écoles de rhétorique grecques et latines que sont sortis ces dangereux sophistes et ces poètes sensualistes qui ont contribué pour la plus large part à la décadence de la Grèce et de l'Empire romain; on peut se demander s'il n'en est pas de même aujourd'hui (*)?

Pourquoi s'attarder encore dans une méthode superficielle et formaliste, datant de l'enfance de la civilisation, qui aboutit trop souvent, en dépit des meilleures intentions des pédagogues, à former des rhéteurs, des sceptiques et des comédiens plutôt que des observateurs consciencieux et des penseurs?

Qu'on juge donc *l'arbre d'après ses fruits*, au lieu de continuer à disserter vainement sur l'excellence de la méthode. Est-ce à tort que la presse moderne proteste unanimement contre la versatilité et la loquacité des parlements et autres assemblées délibérantes contemporaines, où l'éloquence dame trop souvent le pion à la science... et à la vérité?

N'est-il pas temps de réduire à sa juste valeur cette fausse et dangereuse monnaie de la rhétorique qui n'a eu cours jusqu'ici que grâce au maintien des programmes surannés d'un enseignement habituant l'esprit, quoi qu'on en dise, à se payer de mots, à se laisser prendre à la musique des phrases et au charme des images qui troublent le jugement?

« *Notre éducation est toute païenne,* dit le R. P. Grou. Ce

(*) « Le défaut capital de l'enseignement des rhéteurs, c'est qu'il était purement formel, qu'il ne supposait pas de connaissances positives et sérieuses et n'était point contre-balancé par de sévères études scientifiques. Détaché de la saine réalité et flottant dans un monde imaginaire il habituait l'apprenti orateur *à se payer de mots* et à se figurer qu'avec *de la mémoire et de l'imagination, un peu d'esprit et beaucoup d'aplomb*, on pouvait se dispenser de connaître les hommes et les choses. » (*La Littérature latine jusqu'aux Antonins*, par F. Thomas, professeur à l'Université de Gand.) — La littérature française contemporaine ne verse-t-elle pas dans les mêmes abus? Le sentiment de la beauté est exclusivement développé chez le plus grand nombre des romanciers, des auteurs dramatiques et des poëtes actuels aux dépens du sens moral et du jugement; mais, comme le dit si bien le professeur Huxley: « *la puissance d'expression est si bien cultivée qu'on prendrait leurs miaulements langoureux et sensuels pour l'harmonie des sphères* ».

» système d'étude affaiblit l'esprit de piété chez les enfants. Il se » forme dans leur tête un mélange confus de la morale de » l'Évangile et de la *morale tout humaine et toute sensuelle des* » *païens*. Nous ne réfléchissons pas assez sur les impressions » que reçoit le cerveau tendre des enfants. Mais *je ne doute pas* » *que la lecture des anciens n'ait contribué à former ce grand* » *nombre d'incrédules qui ont paru depuis la Renaissance des* » *lettres*..., ce qui ne serait pas arrivé si la jeunesse n'avait pas » été prévenue d'une admiration servile pour les grands noms » de Platon, d'Aristote et des autres.

» Cette éducation accoutume encore les enfants à *se repaître* » *de fictions et de mensonges agréables*. De là l'empressement » ardent pour les représentations théâtrales, pour les contes, » pour les aventures, pour les romans, pour tout ce qui plaît » aux sens, à l'imagination, aux passions. De là la légèreté, la » frivolité, *l'aversion pour les études sérieuses, le défaut de bon* » *sens* et de solide philosophie. C'est encore dans les colléges » que les enfants *prennent le goût pour les ouvrages passionnés,* » *obscènes, dangereux à tous égards pour les mœurs*. Car tels » sont la plupart des anciens poëtes ; je n'en excepte pas » Térence ni Virgile même.

» Ce n'est ici que le commencement du mal. Ce goût du » paganisme, contracté dans l'éducation publique ou privée, *se* » *répand ensuite dans la société*, à la faveur des beaux-arts... Pas- » sez dans les appartements des grands, dans leurs galeries, dans » leurs jardins, dans les cabinets de curiosités ; que représentent » la plupart des tableaux, des statues, des estampes ? Des sujets » et des personnages empruntés de l'antiquité profane... Les » femmes elles-mêmes qui veulent lire... apprennent dès l'en- » fance l'histoire poétique et les principaux traits de l'histoire » grecque et romaine : *cela fait aujourd'hui une partie essen-* » *tielle de leur éducation*. L'on a traduit pour elles les auteurs » anciens, même les plus dangereux ; on a composé des diction- » naires, des abrégés et d'autres livres à leur usage, AFIN » QU'ELLES PUISSENT ÊTRE AUSSI PAÏENNES QUE LES HOMMES.

» Or, ce sont les littérateurs qui, soit par leurs écrits, soit par

» leurs discours, donnent le ton à leur siècle, président aux
» jugements et *forment les mœurs publiques.*

» Qu'est-il arrivé de là? Nous ne sommes point idolâtres, il » est vrai, mais nous ne sommes chrétiens qu'à l'extérieur (si » même la plupart des gens de lettres le sont aujourd'hui), et » dans LE FOND NOUS SOMMES DE VRAIS PAÏENS, ET POUR L'ESPRIT, ET » POUR LE COEUR, ET POUR LA CONDUITE. » (*Morale tirée de saint Augustin*, t. I, chap. 8; par le R. P. Grou.)

Ces critiques, de sources peu suspectes, confirment absolument ce que nous n'avons cessé de dire, nonobstant les affirmations contradictoires de ceux qui partagent les idées de M. Mansion.

« Quelle est, écrivions-nous en 1879 dans la *Revue générale*, la cause de ce scepticisme universel qui sévit, il faut bien le reconnaître, avec une puissance effrayante dans nos sociétés chrétiennes, sinon l'incertitude, l'inexactitude d'un enseignement littéraire soi-disant philosophique, qui laisse les intelligences flotter dans le vague, qui habitue l'esprit à se payer de mots et à se contenter de raisons et de démonstrations par à peu près, dont la faiblesse est artistement dissimulée par les artifices de la forme; il faut bien l'avouer, la rhétorique chrétienne contemporaine n'est pas toujours à l'abri de ce reproche. »

Les premiers Pères de l'Église partageaient d'ailleurs notre manière de voir.

Voici ce qu'écrivait saint Grégoire le Thaumaturge, qui fut converti par Origène à l'École d'Alexandrie : « Il nous exerçait dans la critique en nous apprenant à juger sainement des mots et des discours, non pas d'après les procédés des rhéteurs célèbres, pour savoir, par exemple, si telle locution a la forme grecque ou barbare : *une pareille science est futile et sert à peu de chose.* Il nous formait dans l'art de penser et de raisonner juste, art souverainement nécessaire aux Grecs et aux Barbares, aux savants comme aux ignorants, et, pour résumer d'un mot toutes les industries et toutes les professions, à n'importe quel homme, quel que soit son genre de vie; car, jusque dans la moindre conversation, chacun s'applique à ne pas être trompé.

Il ne se bornait pas toutefois à cultiver en nous les qualités de l'âme que la dialectique seule peut discipliner, mais il demandait en outre aux sciences naturelles *le moyen de redresser et de corriger cette partie inférieure de notre être où domine la sensation;* il ne voulait pas que le magnifique spectacle de ce vaste univers, si bien réglé dans ses différentes parties, n'excitât en nous qu'une stupéfaction aveugle ou une terreur irréfléchie, comme chez les animaux privés de raison.

« Par ces savantes leçons, fruit de ses souvenirs et de ses propres recherches, il faisait naître dans notre âme, à la place d'un étonnement vulgaire, une admiration raisonnée pour les merveilles de la création ». (Mgr Freppel, *Panégyrique d'Origène, par Grégoire le Thaumaturge*) (*).

Nous pouvons dire aujourd'hui que la science a trouvé la clef du temple, dont le sanctuaire reste toujours environné de mystère, il est vrai, mais où l'homme peut cependant, en se pénétrant des lois naturelles de la vie, comprendre souvent l'idée divine réalisée dans l'univers visible.

« Esprit sublime, disait Goethe, tu m'as donné la puissante nature pour royaume; la force de la sentir et d'en jouir; mais tu ne t'es pas borné à me permettre avec elle un commerce froidement admiratif... Tu m'as donné la joie de lire dans sa poitrine profonde comme dans le sein d'une amie...

» Tu conduis devant moi la file des vivants et m'apprends à connaître mes frères dans le buisson silencieux, dans l'air et dans les eaux. Tu m'as donné cette volupté qui me rapproche de plus en plus des dieux. »

On chercherait vainement dans les poètes grecs ou latins une plus belle page pour exprimer la communion de l'esprit avec la nature, grâce aux révélations de la science.

Et qu'on ne dise pas que ces jouissances ne sont accessibles qu'aux mathématiciens.

(*) *Les Lois naturelles de l'éducation*, par A. Proost, 1881. Édit. Coomans.

Écoutez Charles Nodier, qui ne fut pas seulement un grand écrivain, mais un entomologiste et un botaniste passionné :

« Il y a quelque chose de merveilleusement beau dans cette étude de la création. L'homme qui n'a pas pénétré ces mystères a peut-être manqué d'un sens pour goûter la vie. On a peint toutes les voluptés de l'âme ; je regrette qu'on n'ait pas décrit la volupté immense qui saisit un cœur de douze ans, formé par un peu d'instruction et beaucoup de sensibilité à la connaissance du monde vivant, et s'emparant de lui comme d'un apanage dans une belle matinée de printemps. C'est ainsi qu'Adam dut voir le monde fait pour lui quand il s'éveilla d'un sommeil d'enfant au souffle créateur.

» Oh ! que la terre me paraissait belle !

» Il me semblait déjà, car je n'ai pas changé d'opinion, que l'étude approfondie des *faits de la création* était plus digne qu'aucune autre d'exercer une sainte intelligence et que le reste n'était guère bon qu'à occuper les loisirs futiles et extravagants des peuples dégénérés (*) ! »

M. Mansion ne peut ignorer qu'un grand nombre de naturalistes, de botanistes, de zoologues, de géologues, de micrographes ne sont pas des mathématiciens.

Je suis convaincu, au contraire, qu'un enfant qui ne connaît que les quatre règles de l'arithmétique et les premiers éléments de la géométrie peut pénétrer très loin dans l'étude des merveilles de la nature et développer singulièrement ses facultés d'observation, d'analyse et de synthèse ; ce qui n'est pas précisément le cas pour les malheureux que l'on *gave*, dès l'âge le plus tendre, de mots, de phrases et de formules, suivant la méthode antique et solennelle, renouvelée des Grecs : méthode qui leur enlève le temps de penser et les empêche d'*apprendre à voir ;* l'on ne s'en aperçoit que trop dans nos universités.

(*) Ce chapitre de Ch. Nodier réfute mieux que tout commentaire cette affirmation étonnante : « que l'on ne peut pas trouver dans les sciences naturelles des sujets de rédaction ». Nous avons d'ailleurs prévenu cette objection dès 1866 dans une conférence donnée au cercle académique de l'Institut Saint-Louis, à Bruxelles, sur l'*utilité des sciences naturelles.* (Voir le rapport du secrétaire, 1867.)

L'école primaire est un véritable banc de torture pour certaines catégories d'intelligences dont la mémoire machinale est souvent d'autant plus rebelle que le développement de la raison et le travail de l'imagination sont plus précoces.

C'est là un phénomène psychique qui saute aux yeux de tout observateur et dont la pédagogie, qui ne connait que le *Magister dixit*, ne semble pas même se douter.

Dans l'assemblée générale d'avril 1876, j'ai insisté tout particulièrement sur l'avantage que présentent les sciences naturelles pour éveiller le *goût de l'étude*, pour entraîner l'intelligence, chose capitale et dont l'ancienne pédagogie, toujours armée de la férule, en vraie barbare qu'elle était, n'avait cure, pas plus qu'elle ne s'inquiétait de la santé ni du développement normal des facultés. Je n'hésite pas à le dire, si nos braves pédagogues, enlisés dans l'ornière des anciennes méthodes, pouvaient briser leurs lunettes de myopes pour adopter les verres que la science moderne met à leur service, ils seraient épouvantés de voir le nombre de malheureux, de malades, de déséquilibrés, de révoltés sortis de leurs écoles et victimes de leur entêtement dans la routine.

La réforme que nous préconisons aurait le grand avantage de réduire le nombre d'heures d'étude en diminuant l'étendue des *devoirs*, et de ne plus lancer absolument désarmés dans la vie les jeunes gens qui ne peuvent finir ou dépasser les humanités. Pourquoi s'obstiner à imposer des lisières et des béquilles, là où il suffirait, suivant le sage aphorisme d'Hippocrate, d'écouter et d'aider la nature au lieu de la violenter? En supprimant les classes dites professionnelles, en rendant l'enseignement commun depuis l'école primaire jusqu'à la troisième, en profitant de cette période pour enseigner les langues vivantes et pour apprendre à l'homme à exercer ses sens, à se connaître et à connaître son milieu, on ne porterait en réalité aucun préjudice sérieux à l'étude des langues anciennes ni aux vocations ecclésiastiques.

A partir de la troisième commencerait la bifurcation, dans la voie scientifique ou littéraire. Ainsi on laisserait aux vocations et *aux facultés* le temps de se dessiner, sans écraser l'intelligence

sous le fatras indigeste des exercices mnémotechniques à haute pression, qui forment des êtres passifs, réceptifs et impersonnels.

Nous restons persuadés, et nous parlons d'expérience, qu'on peut apprendre et RETENIR plus de latin en trois ou quatre ans par la méthode que nous avons préconisée qu'en six par la méthode en usage. D'ailleurs, rien n'empêche de renforcer ces études, si on le désire, pendant les deux années de philosophie dont le programme hétérogène pourrait être élagué largement; ou bien, *de supprimer le grec*, comme tant de gens instruits le demandent aujourd'hui.

Le génie d'une langue s'acquiert beaucoup plus en la parlant qu'en pâlissant sur les grammaires et les dictionnaires qui développent plutôt le dégoût de l'étude que les facultés de la raison (*).

L'argument consistant à soutenir que tous les grands penseurs ont été formés par cette méthode n'est pas topique. Ne vaudrait-il pas mieux dire qu'ils se sont formés « *malgré* la méthode » ? De même qu'il existe des corps vigoureux qui supportent les plus mauvais régimes, il y a des esprits robustes qui s'accommodent du brouet noir classique sans en souffrir comme les autres. Il ne s'ensuit nullement que ce brouet soit bon et ne puisse être rendu meilleur. La meilleure *gymnastique* est, toutes choses égales d'ailleurs, la plus *utile* et celle qui assure le développement de *toutes* les facultés.

(*) « Il semblerait peut-être paradoxal de soutenir, écrit M. du Bois-Reymond, que si le but n'est pas atteint avec de fortes doses de latin et de grec, il le sera peut-être avec des doses *moins fortes*.

» Cependant, quand on *considère l'ensemble* des jeunes gens élevés dans nos gymnases, on ne trouve pas chez eux un intérêt suffisant pour ce qui fait l'objet des études classiques, et c'est *pourtant cela qu'il faudrait* pour obtenir une réaction dans le sens idéaliste. Abstraction faite des philologues, le nombre est bien petit de ceux qu'on verra plus tard ouvrir quelquefois un écrivain ancien. Loin d'aimer passionnément les classiques, la plupart y pensent avec indifférence ou même *avec aversion*. L'idée qui leur reste de l'histoire universelle est celle de dates insignifiantes apprises par cœur. Et c'est pour en arriver là que ces jeunes gens se sont assis trente heures par semaine, jusque dix-huit ou vingt ans, sur les bancs de l'école! C'est en vue de cela qu'ils ont étudié surtout le grec et le latin! » « On recule effrayé, ajoute M. Th. Ferneuil, du vide d'idées, de l'absence d'excitation intellectuelle qui caractérisent ces cerveaux de vingt ans. » (*La Réforme de l'enseignement en France*.)

Dans son *Discours sur la méthode pour bien conduire la raison*. Descartes raconte qu'il s'était mis avec une grande ardeur à l'étude des lettres parce qu'on lui avait persuadé que, grâce à elles, on pouvait acquérir une connaissance claire de tout ce qui est utile à la vie.

« Mais sitôt que j'eus achevé ce cours d'études, dit-il, au bout duquel on a coutume d'être reçu au rang des doctes, je changeai entièrement d'opinion, car je me trouvais embarrassé de tant de doutes et d'erreurs qu'il me semblait n'avoir fait d'autre profit en tâchant de m'instruire, sinon que j'avais découvert de plus en plus mon ignorance. »

« L'homme n'est homme que par l'intelligence, disait l'abbé David, membre de l'Institut de France, lazariste, missionnaire en Chine; il est d'autant plus homme qu'il est plus intelligent, et il est d'autant plus intelligent qu'il possède plus de notions exactes, plus d'idées justes. Le talent naturel seul, ce qu'on nomme inspiration, intuition, peut faire des littérateurs, des poètes, des artistes; mais ceux-ci, qui peuvent parfois remuer le monde, *le laissent au même point intellectuel où ils l'ont trouvé*. Seule la persévérance des hommes de science parvient à déchirer quelques lambeaux du voile sous lequel Dieu a caché la vérité naturelle et à élargir réellement la sphère où s'agite l'esprit humain. »

Voilà le témoignage d'un savant religieux qui savait à quoi s'en tenir sur la valeur de nos programmes classiques et qui protestait, comme nous, contre ce culte abusif de la forme qui ne fait pas avancer l'humanité d'un pas et qui perpétue le règne néfaste des rhéteurs.

J'ai appelé l'attention de la Société, dans une précédente séance, sur les merveilleux résultats obtenus par l'application de la méthode scientifique à l'éducation de l'homme dans les nouveaux asiles d'enfants arriérés, imbéciles et idiots, notamment à Bicêtre et à la Salpêtrière. J'ai opposé ces résultats aux affirmations des pédagogues officiels, qui repoussent la méthode et la critique scientifiques pour maintenir, *per fas et nefas*, leurs

anciens programmes fondés sur l'empirisme; ou d'autres pédagogues libres qui jettent le manche après la cognée et nient l'existence d'une science pédagogique, après avoir constaté l'impuissance des anciennes méthodes (voir notamment l'article de M. Francisque Bouillier, ancien inspecteur de l'enseignement, dans le CORRESPONDANT : *La Pédagogie et les pédagogues*).

M. le professeur Mansion nous répond qu'il y a longtemps que la pédagogie est sortie de la phase empirique pour ce qui concerne notamment l'enseignement des mathématiques. Je ne le pense pas, car on persiste dans beaucoup d'écoles à enseigner les mathématiques avant l'âge où la faculté d'abstraction se développe. En tous cas, j'estime qu'aussi longtemps que les pédagogues feront fi des révélations de la biologie, ils ne pourront pas se targuer d'être sortis de l'ornière de la routine. Les maîtres les plus dévoués, les parents les plus soucieux de l'avenir de leurs enfants, mais étrangers aux sciences de la nature, rompent, sans le savoir, l'équilibre des facultés physiques et MORALES; on ne saurait assez le répéter.

« La physiologie, disions-nous en 1876, a projeté une vive » lumière sur les rapports de l'âme et du corps, sur toutes les » périodes de notre évolution corporelle, sur l'origine et le traite- » ment physique de certaines maladies que l'on croyait purement » morales autrefois et contre lesquelles le traitement moral » échouait cependant. *Qu'on n'accuse donc pas la science de ten- » dances matérialistes alors qu'elle contribue si largement à » affranchir l'intelligence des liens de la matière,* qu'elle apprend » à connaître et à diriger ces innombrables engrenages de l'uni- » vers qui broient impitoyablement quiconque s'oppose sans le » savoir à leur marche fatale. Toute l'histoire de l'humanité est » là pour attester que la lutte inégale de l'homme contre la » nature engendre fatalement le vice et l'abrutissement avec la » misère et la maladie. Le niveau moral d'un peuple baisse à » mesure que son organisme s'altère, que ses besoins matériels » augmentent et le préoccupent davantage; il s'élève au contraire » à mesure que l'homme parvient à s'en affranchir, à moins que

» par un vertige d'orgueil, dont notre génération nous offre le » triste spectacle, l'esprit humain enivré de ses conquêtes ne se » refuse à reconnaître la loi religieuse en dehors de laquelle la » science seule est impuissante à travailler au progrès de » l'humanité.

» Sous ces réserves, nous n'hésitons pas à reconnaître avec » M. Littré que nous manquons de véritable histoire.

» On s'attache exclusivement à consigner les révolutions des » empires et les luttes des armées et on laisse inaperçu ce tra- » vail souterrain des sciences qui modifie bien plus l'état social » du genre humain que ne le font les événements militaires et » les calculs politiques. » (*L'Enseignement des sciences naturelles dans les écoles primaires et moyennes.* JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ CENTRALE D'AGRICULTURE DE BELGIQUE.)

Pour peu qu'on se donne la peine d'observer, on ne tarde pas à constater que la moyenne des esprits formés dans nos écoles littéraires se caractérise par un développement souvent exclusif et excessif de la mémoire et de l'imagination, aux dépens des facultés d'analyse et de généralisation. Cette lacune saute particulièrement aux yeux dans l'enseignement de l'histoire, qui laisse à désirer, tant au point de vue de l'examen des faits que de leur synthèse. Les auteurs classiques se calquent les uns sur les autres et noient les données essentielles dans un océan de détails, amalgame indigeste que l'élève s'empresse d'oublier dès qu'il a quitté le collège. Cette absence d'initiative, de critique et de synthèse qui se fait jour de toutes parts, qui perpétue d'anciens abus et s'oppose à l'adoption des réformes les plus nécessaires, ne fournit-elle pas une preuve éclatante de l'insuffisance des humanités actuelles, qui exercent la mémoire et l'imagination aux dépens des facultés essentielles de la raison, de celles qui affranchissent l'homme des préjugés et de la routine, en apprenant à voir, à penser et en formant des esprits exacts? (*Revue des questions scientifiques*, tome III, 1878 : *Les Naturalistes philosophes.*)

Nous avons déjà insisté (*), pour remédier provisoirement à toutes les lacunes que nous venons de signaler, sur la nécessité d'introduire un cours obligatoire de *philosophie naturelle* au programme de nos écoles de droit où se forment nos législateurs, afin de leur permettre d'apprécier en connaissance de cause la portée des découvertes scientifiques, tant dans l'ordre pédagogique que dans l'ordre juridique, sociologique, industriel, agricole, etc. Notre voix n'est pas restée sans écho, mais nous croyons nécessaire d'insister sur l'importance et l'urgence de cette réforme. La lumière doit venir d'en haut.

Nous avons insisté également, dans une précédente séance, sur la nécessité d'étendre la réforme des programmes à l'enseignement des filles. Nous avons dit et nous maintenons que c'est dans les pensionnats et dans les écoles normales de femmes que l'hygiène est encore le plus aveuglément violée. Il est temps de faire bénéficier la femme des découvertes de la biologie, qui lui apprennent à élever des enfants en connaissance de cause.

Combien de jeunes filles traverseraient sans accident la période critique de leur développement, si on appliquait dans les couvents les règles de la gymnastique rationnelle qui donne de si beaux résultats en Suède et en Allemagne!

Combien de milliers d'enfants échapperaient chaque année à la mort si leurs mères avaient appris autre chose à l'école que des arts d'agrément, toujours en vertu de ce déplorable système qui sacrifie tout au *culte de la forme* (**)!

Si le *beau* n'est que la splendeur du *vrai*, l'éducation qui sacrifie le culte de la vérité à celui d'une esthétique de convention est une éducation vicieuse et condamnable.

Est-ce à dire qu'il faille sacrifier complètement l'éducation esthétique ou littéraire à l'éducation scientifique et positive? Loin

(*) Notamment au Congrès international d'agriculture de Paris en 1889 (section de l'enseignement).

(**) Voir notre article *L'Hérédité et l'éducation*. REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, 1882, avril.

de nous cette pensée. L'étude du vrai et du beau sont inséparables, nous le répétons. Mais il ne faut pas, maintenant que nous commençons à pénétrer le sens des choses, l'enchainement des phénomènes de la nature dont nos ancêtres étaient les jouets, continuer à consacrer presque toute l'adolescence à l'étude du *sens des mots* et surtout des langues mortes, alors que la connaissance pratique des langues vivantes devient indispensable *a tous*. Nous dirons plus : le *salut* d'un bon nombre de nos contemporains est subordonné en ce monde à la connaissance de ces langues qui leur permet de s'expatrier et de préserver leur famille de la misère et de la démoralisation.

« Si les universités, dit M. Mansion, versent chaque année dans la nation quelques centaines de déclassés, c'est à la suppression de l'examen d'entrée qu'il faut s'en prendre. »

Qu'on relise donc les discussions parlementaires qui ont précédé l'abolition de ce diplôme ! On verra que le nombre des déclassés qui se buttaient contre cet examen n'était guère moindre qu'aujourd'hui; car, nous l'avons dit souvent, le caractère dangereux des humanités traditionnelles consiste à emprisonner la jeunesse dans le royaume d'utopie, à élever l'homme dans un milieu factice, à lui donner des habitudes d'esprit qui le désarment trop souvent dans la lutte pour l'existence (*), s'il ne parvient pas à conquérir rapidement ses diplômes universitaires. Tandis que la méthode que nous préconisons présenterait les multiples avantages d'éliminer spontanément les incapables, de fournir de très bonne heure un bagage *utile* à l'étudiant et de permettre à chacun de s'orienter dans une voie déterminée en meilleure connaissance de cause et sans s'exposer au surmenage.

M. Proost rencontre enfin l'argument invoqué par M. Mansion, professeur de mathématiques, en appelant son attention sur un passage du récent *referendum* des médecins à l'Académie de

(*) A lire les œuvres de Jules Vallès : *L'Insurgé, les Réfractaires, le Bachelier*

Paris, dont il a invoqué le témoignage à l'appui de l'ancien programme des humanités.

Il est vrai que ces Messieurs ont protesté contre la suppression des langues anciennes, mais non contre une transformation des programmes dans le sens indiqué plus haut. Quant aux sciences mathématiques, dit le rapporteur, « c'est une grave ques-
» tion, de savoir dans quelle mesure il importe aux futurs méde-
» cins d'y attacher *spécialement* leur esprit... L'expérience a *mille*
» *fois* montré que les esprits les plus brillamment préparés par
» l'étude et la méditation des mathématiques étaient ceux qui
» se pliaient le moins aisément à la complexité générale des
» problèmes médicaux, ceux qui étaient exposés davantage à
» commettre ces prodigieuses erreurs. »

Donc, les mathématiques ne constituent pas un *contrepoids* suffisant aux études littéraires, qui développent surtout la mémoire et l'imagination. D'ailleurs, les mathématiques rebutent un grand nombre d'esprits, d'où il résulte qu'*en fait* beaucoup de jeunes gens n'étudient pas sérieusement ces sciences dans leurs humanités. Au contraire, les sciences naturelles *intéressent* le plus grand nombre par leur caractère intuitif et contre-balancent, par leur méthode, le développement anormal de certaines facultés, tout en initiant le jeune homme aux lois de la vie.

Nous n'avons pas affirmé, comme M. Mansion semble vouloir nous le faire dire, que les sciences naturelles suffisent pour former un homme complet. Nous sommes convaincus que les études littéraires et philosophiques doivent marcher de pair avec l'enseignement des lois de la nature et qu'il importe même d'approfondir l'étude d'une langue, mais de préférence l'étude de la langue maternelle, *à l'exemple d'ailleurs des Grecs et des Latins.* Nous nous inscrivons en faux, au nom de l'expérience, contre cette affirmation qu'on ne peut bien écrire ou bien parler le français sans connaître le latin et le grec. C'est en forgeant qu'on devient forgeron; c'est en lisant, c'est en parlant et en écrivant une langue qu'on l'apprend le mieux et qu'on se pénètre de son génie. Bon nombre de femmes françaises, ne connaissant pas

un mot de latin, écrivent et parlent leur langue souvent beaucoup mieux que certains pédants gourmés qui affirment le contraire, sans s'inquiéter des *faits*, parce que leur esprit d'observation et leur sens critique sont restés en friche, n'en déplaise à M. Potain et à M. Fouillée!

Ce n'est pas sans étonnement que nous voyons M. le professeur Mansion invoquer l'autorité de ce dernier, dont les tendances matérialistes et les théories nébuleuses et fantaisistes sur la morale sont bien connues des lecteurs de la *Revue des Deux Mondes* (*); mais ce qui nous dépasse absolument, nous l'avouons, c'est d'entendre notre savant contradicteur répéter avec M. Fouillée que les sciences naturelles développent surtout la mémoire et non le raisonnement inductif, l'esprit spéculatif et d'hypothèse, alors que l'expérience nous démontre chaque jour le contraire. « Les sciences naturelles, disait le grand Cuvier, *apprennent à penser* parce qu'elles développent tour à tour les facultés d'induction et d'analyse, de synthèse et de généralisation. Elles ont le privilège de répandre des idées saines dans toutes les classes, de soustraire les hommes à l'empire des préjugés et des passions, de faire de la raison le guide de l'opinion publique et de concourir largement à la civilisation. »

Comment peut-on prétendre que les sciences naturelles ne nous initient qu'aux idées relatives à la matière, quand elles nous mettent à chaque instant en présence des problèmes les plus palpitants de la psychologie et de la métaphysique par l'étude de la biologie, de la paléontologie et de la cosmologie, de l'instinct et de l'intelligence des animaux, des rapports de l'âme et du corps, de l'origine et de l'avenir des astres, etc., etc.?

« Les cieux racontent la gloire de Dieu, » dit l'Écriture. Ne peut-on pas dire, contrairement à ce qu'affirme M. Mansion,

---

(*) N'est-ce pas M. Fouillée qui affirme notamment dans cette *Revue* (15 juillet 1890, pp. 290 et 293) que « la culture purement *formelle* que les jésuites avaient mise en honneur exerçait l'esprit sans le nourrir », et que « l'esprit mathématique, c'est l'art, dans la vie publique comme dans la vie privée, *de ne voir qu'un côté de la question* »?

qu'à chaque instant ces sciences nous ramènent au seuil du « Divin » ?

Je me plais à rendre hommage en terminant au noble souci de mon contradicteur qui appréhende par-dessus tout l'avènement du matérialisme par la culture scientifique, exclusive de la littérature et de la philosophie.

Mais jamais nous n'avons soutenu cette thèse. M. Degive est persuadé comme moi que rien n'est plus dangereux pour l'esprit humain que de le confiner dans une étroite spécialité.

M. Mansion nous objecte que l'enseignement intuitif des sciences prendrait un temps énorme s'il fallait l'organiser sérieusement; nous sommes convaincus du contraire, surtout si l'on commence cet enseignement dès l'école primaire et si l'on élague les anciens programmes, comme nous le proposons.

M. Mansion ne semble pas bien comprendre notre pensée quand nous préconisons cet enseignement. Qu'il nous soit permis d'invoquer ici l'autorité d'un inspecteur général de l'enseignement primaire, qui parle en connaissance de cause :

« Les leçons de choses ! Le mot est bien vague; si vague que certains pédagogues entendent par là des leçons sur la nature, l'homme, la vie sociale et la divinité, c'est-à-dire sur tout. C'est trop et la leçon de choses doit être plus modeste.

» A mon avis, elle est une simple initiation à l'étude des sciences expérimentales; son domaine comprend les objets sensibles que l'enfant trouve à sa portée. Il finit où la science commence. Son but est d'apprendre à observer. Sa méthode consiste à faire trouver au lieu d'enseigner.

» La leçon de choses est née d'une heureuse réaction contre l'habitude de parler des choses sans les faire voir, de puiser dans les livres des connaissances que l'on peut acquérir par soi-même. C'est une substitution de l'expérience personnelle à l'autorité didactique, de l'observation à la lecture, des idées correctes aux mots vides de sens.

» Autrefois, l'enfant ne se servait guère de ses yeux que pour

apprendre à lire. Le livre était tout. C'était la seule et unique source du savoir.

» C'est à travers le livre qu'il voyait la nature. Au lieu de regarder les objets eux-mêmes, il s'en faisait une idée d'après le livre.

» Avec la leçon de choses, le livre disparaît, l'enfant est mis en présence des objets, et lorsque ensuite il arrive au livre qui lui parle, il compare ce qu'il a appris par lui-même avec ce que le livre veut lui apprendre. Il devient jusqu'à un certain point juge du livre. Il a plaisir à trouver que l'auteur a vu comme lui-même. Il prend confiance en son propre jugement, il s'assure de ce qu'il sait, et apprend plus vite et mieux ce qu'il ignore.

» Cette méthode est excellente. Est-elle bien comprise? Est-elle bien appliquée? Pas encore.

» On a publié bien des livres intitulés : « Leçons de choses. » J'en ouvre un, au hasard, et j'y trouve sur les céréales toutes les connaissances qu'on peut raisonnablement souhaiter qu'un enfant acquière à l'école sur ce sujet.

» Mais si le maître fait lire, ou lit, ou expose ce chapitre, aura-t-il fait une leçon de choses? Nullement. Il aura fait une leçon sur les choses.

» Dans la leçon ainsi nommée, ce sont les choses elles-mêmes qui font en quelque sorte la leçon, ce sont elles qui parlent et font parler. Il faut donc qu'elles soient présentes, elles de préférence, et à défaut, leur image.

» Le maître apportera donc des grains de blé d'espèces différentes, et au lieu de commencer doctoralement avec le livre et de dire : « Il y a deux espèces principales de blé, le blé tendre et le blé dur », il donnera aux enfants les deux espèces de grains, il les invitera à les bien regarder et se les mettre sous la dent. Les enfants lui diront d'eux-mêmes que parmi ces grains, etc.

» De même le maître apportera des épis de blé, de seigle, d'orge et d'avoine, etc.

» Il ne dira rien que ce que l'enfant peut dire. La comparaison fixée, les enfants la résumeront.

» Ce qui importe ici, ce que le maître ne doit pas perdre de vue, c'est qu'il s'agit moins encore de l'acquisition de quelques connaissances que du développement d'une faculté et de la direction de l'esprit lui-même.

» Ces connaissances, il lui reste du temps pour les acquérir, tandis qu'il n'y a qu'un temps pour prendre de bonnes habitudes, et c'est celui de la scolarité.

» *Quelques petites collections botaniques, géologiques, minéralogiques, etc., etc., voilà les premiers éléments des musées scolaires...*

» Suivant la nature du pays, ses ressources, ses produits, ils prennent un aspect différent et offrent aux yeux une sorte d'image du pays lui-même (*).

. . . .

» Le petit enfant est curieux, désireux de voir, de sentir, de toucher, de mesurer les objets. C'est cette curiosité naturelle qu'il faut diriger et tourner à son profit.

» *Plus on commencera de bonne heure, plus on tirera de fruit.*

» L'enfant prendra insensiblement et sans s'en douter l'habitude de l'observation méthodique. Et, dans son cerveau tendre encore, les objets s'imprimeront plus aisément avec des traits précis que l'âge affermira.

» Alors les premiers tâtonnements de sa pensée rencontreront déjà des formes arrêtées, des idées nettes et vives, dont il saisira mieux les rapports naturels. Ses jugements seront plus sûrs et plus prompts, ses raisonnements plus solides.

» Au lieu des idées vagues que laisse un enseignement purement oral, il aura dans l'esprit les formes nettes et ineffaçables des choses ; ce qu'on a entendu s'oublie; ce que l'on a vu et

(*) Nous avons appliqué cette méthode avec succès en Belgique. Voir les rapports sur l'Exposition collective des écoles d'agriculture à l'Exposition d'Anvers. (A. P.)

observé, surtout dans l'enfance, demeure. » (*De l'enseignement à l'école et dans les classes de grammaire des lycées et des collèges*, par A. Vessiot, inspecteur général de l'enseignement primaire, ancien élève de l'École normale supérieure, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique) (*).

(*) Après le discours de M. Proost, M. Mansion déclare qu'il fait ses réserves sur certaines opinions qui viennent de lui être attribuées, et M. le Président déclare close la discussion.

RECHERCHES

SUR

LES ACCÉLÉRATIONS EN GÉNÉRAL

PAR

PH. GILBERT

Professeur à l'Université de Louvain (*).

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES ACCÉLÉRATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

§ 7. *Composantes tangentielle, normale et binormale de l'accélération d'ordre quelconque dans le mouvement d'un point. Extension aux coordonnées curvilignes.*

39. On connaît depuis longtemps les composantes de l'accélération d'un point suivant la tangente et la normale principale de la trajectoire. M. Resal (*Traité de cinématique pure*, p. 269) et, après lui, M. Schell (*Theorie der Bewegung und Kräfte*, t. I, p. 544), ont obtenu, par des considérations géométriques ingénieuses, les composantes de la *suraccélération* suivant les mêmes directions et suivant la *binormale*; mais cette méthode deviendrait impraticable, à cause de sa complication, pour les accélérations d'ordre supérieur. La méthode analytique employée par M. Bouquet dans les *Annales de l'École normale*, année 1874,

(*) Voir la Première partie, dans les *Annales*, 1889, t. XIII, 2e partie, pp. 261-315. La seconde partie, dont l'impression a été votée le 26 janvier 1893, a été retrouvée dans les papiers de M. Gilbert après sa mort.

page 147, outre qu'elle entraîne des calculs assez compliqués, ne donne pas la loi générale de formation de ces trois composantes.

La méthode rapide et facile que nous allons suivre, au contraire, donne la loi très simple qui lie les composantes tangentielle, normale et binormale de l'accélération d'ordre $n+1$ à celles de l'accélération d'ordre n.

Rappelons que si l'on désigne par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente à une courbe gauche; par λ, μ, ν ceux de la normale principale; par X, Y, Z ceux de la binormale; par R et T les rayons de courbure et de torsion, on a les formules bien connues (*) :

$$(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \frac{d\lambda}{ds} = -\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{X}{T}\right), \quad \frac{dX}{ds} = \frac{\lambda}{T},$$

et d'autres semblables pour les cosinus directeurs relatifs à l'axe des y et à l'axe des z.

Cela posé, appelons j_n l'accélération d'ordre n du point mobile M, et j_{nv}, j_{np}, j_{nb} respectivement ses composantes suivant les directions de la vitesse, de la normale principale et de la binormale à la trajectoire. On a évidemment

$$j_{nx} = j_{nv} \cdot \alpha + j_{np} \cdot \lambda + j_{nb} \cdot X,$$

et en prenant les dérivées des deux membres par rapport au temps

$$\frac{dj_{nx}}{dt} = j_{n+1,x} = \frac{dj_{nv}}{dt}\alpha + \frac{dj_{np}}{dt}\lambda + \frac{dj_{nb}}{dt}.X + j_{nv}\frac{d\alpha}{dt} + j_{np}\frac{d\lambda}{dt} + j_{nb}\frac{dX}{dt},$$

ou, en substituant les valeurs tirées des formules (α),

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v}{R}\lambda, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -v\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{X}{T}\right), \quad \frac{dX}{dt} = \frac{v}{T}\lambda,$$

(*) Voir mon *Cours d'analyse*, 4e édition, pp. 214, 219, 232, où T toutefois est pris avec un signe opposé à celui qui lui est donné ici.

puis, réunissant les termes affectés des mêmes cosinus,

$$j_{n+1,x} = \left(\frac{dj_{nv}}{dt} - \frac{v}{R} j_{np}\right)\alpha + \left(\frac{dj_{np}}{dt} + \frac{v}{R} j_{nv} + \frac{v}{T} j_{nb}\right)\lambda$$
$$+ \left(\frac{dj_{nb}}{dt} - \frac{v}{T} j_{np}\right) X.$$

Les composantes $j_{n+1,y}$, $j_{n+1,z}$ ne différeront de celle-là que par le changement de α, λ, X en β, μ, Y, puis en γ, ν, Z, évidemment. Il en résulte immédiatement, par les propriétés des résultantes, que les trois composantes de j_{n+1} suivant la vitesse, la normale principale et la binormale ont pour expressions

$$(59) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} j_{n+1,v} &= \frac{dj_{nv}}{dt} - \frac{v}{R} j_{np}, \\ j_{n+1,p} &= \frac{dj_{np}}{dt} + \frac{v}{R} j_{nv} + \frac{v}{T} j_{nb}, \\ j_{n+1,b} &= \frac{dj_{nb}}{dt} - \frac{v}{T} j_{np}. \end{aligned} \right.$$

Telles sont les formules (*) qui permettent de passer immédiatement des composantes de l'accélération d'ordre n à celles de l'accélération d'ordre $n+1$. On observera que j_0 n'est autre chose que la simple vitesse, et j_1 l'accélération ordinaire j.

40. Comme application des ces formules, faisons $n = 0$, d'où

$$j_{0v} = v, \quad j_{0p} = 0, \quad j_{0b} = 0,$$

et par suite

$$j_{1v} = \frac{dv}{dt}, \quad j_{1p} = \frac{v^2}{R}, \quad j_{1b} = 0,$$

valeurs connues des composantes tangentielle et normale de l'accélération.

Faisons $n = 1$ dans les équations (59), et appliquons les

(*) Elles renferment comme cas particulier celles que M. Laisant a publiées dans les *Nouvelles annales de mathématiques* de 1878, p. 494, pour le mouvement dans un plan, formules qu'il a déduites de la méthode des équipollences.

valeurs de j_{1v}, etc. Nous aurons de même

$$(60) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} j_{2v} &= \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}, \\ j_{2p} &= \frac{3v}{R}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds}, \\ j_{2b} &= -\frac{v^3}{RT}, \end{aligned} \right.$$

en remplaçant toujours $\frac{dR}{dt}$ par $\frac{dR}{ds}v$. Ce sont les formules de M. Resal (*loc. cit.*) (*) pour la suraccélération.

Pour mieux montrer la facilité de cette méthode, nous allons encore l'appliquer à l'accélération du troisième ordre. Nous faisons $n = 2$ dans les équations (59) et nous développons les termes des seconds membres au moyen des formules (60). Nous avons

$$j_{3v} = \frac{d^3v}{dt^3} - \frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{R^2}\right) - \frac{v}{R}\left(\frac{3v}{R}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds}\right),$$

$$j_{3p} = \frac{3v}{R}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{3v}{R}\right)\cdot\frac{dv}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds}\right) + \frac{v}{R}\left(\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}\right) - \frac{v^4}{RT^2}.$$

$$j_{3b} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{v^3}{RT}\right) - \frac{v}{R}\left(\frac{3v}{R}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds}\right),$$

ou, en développant et réduisant,

$$(61) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} j_{3v} &= \frac{d^3v}{dt^3} - \frac{6v^2}{R^2}\frac{dv}{dt} + \frac{3v^4}{R^3}\frac{dR}{ds}, \\ j_{3p} &= \frac{4v}{R}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{3}{R}\frac{dv^2}{dt^2} - \frac{6v^2}{R^2}\frac{dv}{dt}\frac{dR}{ds} \\ &\qquad - \frac{v^4}{R^3}\left(1 + \frac{R^2}{T^2} - 2\frac{dR^2}{ds^2} + R\frac{d^2R}{ds^2}\right), \\ j_{3b} &= -\frac{6v^2}{RT}\frac{dv}{dt} + \frac{v^4}{RT}\left(\frac{2}{R}\frac{dR}{ds} + \frac{1}{T}\frac{dT}{ds}\right). \end{aligned} \right.$$

(*) La différence de signe de la dernière composante provient de la convention particulière que nous faisons dans ce mémoire, sur le signe de T.

On voit que tout se réduit à des différentiations faciles. La méthode s'appliquerait aussi aux projections de l'accélération sur d'autres directions; ainsi l'on trouve, par exemple,

$$j_2 \cos \widehat{j_2 j_1} = \frac{dj}{dt}, \quad \text{etc.}$$

Lorsqu'on n'a en vue que les applications géométriques, on peut toujours supposer le mouvement uniforme, ce qui simplifie les formules, les dérivées de v se réduisant à zéro. On a ainsi

$$j_v = 0, \quad j_p = \frac{v^2}{R}, \quad j_b = 0,$$

$$j_{2v} = -\frac{v^3}{R^2}, \quad j_{2p} = -\frac{v^3}{R^2}\frac{dR}{ds}, \quad j_{2b} = -\frac{v^3}{RT},$$

$$j_{3v} = \frac{3v^4}{R^3}\frac{dR}{ds}, \quad j_{3p} = -\frac{v^4}{R^3}\left(1 + \frac{R^2}{T^2} - 2\frac{dR^2}{ds^2} + R\frac{d^2R}{ds^2}\right),$$

$$j_{3b} = \frac{v^4}{RT}\left(\frac{2}{R}\frac{dR}{ds} + \frac{1}{T}\frac{dT}{ds}\right).$$

Il en résulte quelques relations assez curieuses. Ainsi l'on a

$$\frac{j_{2b}}{j_{2v}} = \frac{R}{T}, \quad \frac{j_{2p}}{j_{2v}} = \frac{dR}{ds}, \quad j_{2v} = -\frac{j_p^2}{v}, \quad \text{etc. ...}$$

41. La même méthode conduit très simplement à la solution d'un problème qui n'a été traité jusqu'ici que dans des cas particuliers : la détermination des composantes de l'accélération d'ordre n suivant les normales à trois surfaces orthogonales qui se coupent au point mobile.

Concevons ce point M rapporté à un système de surfaces orthogonales caractérisées par les indices 1, 2, 3. Appelons j_{n1}, j_{n2}, j_{n3} les composantes de l'accélération j_n suivant les normales respectives MN_1, MN_2, MN_3 à ces trois surfaces passant par le point M; α_1, α_2, α_3 les cosinus des angles formés, avec un axe fixe OX, par les directions respectives de ces normales

prises dans le sens où les paramètres λ_1, λ_2, λ_3 des surfaces vont en croissant; ds_1, ds_2, ds_3 les éléments des courbes d'intersection MP_1, MP_2, MP_3 respectivement tangentes à ces directions. De l'équation évidente

$$j_{nx} = j_{n1}\alpha_1 + j_{n2}\alpha_2 + j_{n3}\alpha_3,$$

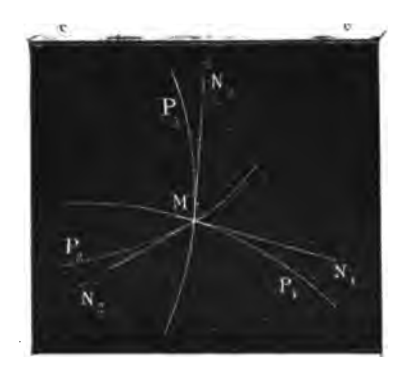


Fig. 1.

on tire

$$\frac{dj_{nx}}{dt} = j_{n+1,x} = \frac{dj_{n1}}{dt}\alpha_1 + \frac{dj_{n2}}{dt}\alpha_2 + \frac{dj_{n3}}{dt}\alpha_3 + j_{n1}\frac{d\alpha_1}{dt} + j_{n2}\frac{d\alpha_2}{dt} + j_{n3}\frac{d\alpha_3}{dt}.$$

Calculons d'abord les dérivées de α_1, α_2, α_3. On a évidemment

$$d\alpha_1 = d_1\alpha_1 + d_2\alpha_1 + d_3\alpha_1.$$

Or, si ρ_1 désigne le rayon de courbure de la courbe d'intersection s_1 des surfaces λ_2 et λ_3, une relation connue donnera

$$d_1\alpha_1 = \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\overline{\rho_1 X}.$$

Ensuite, par le théorème de Dupin, la ligne MP_2 est une ligne de courbure des surfaces λ_1 et λ_3, les normales à la surface λ_1 aux extrémités de l'arc ds_2 se coupent au centre de courbure de la section principale tangente à MP_2, de sorte que, si l'on désigne par R_{12} le rayon de courbure de la section princi-

pale de la surface λ_1 tangente à l'élément ds_2, on aura

$$d_2\alpha_1 = \frac{ds_2}{R_{12}}\alpha_2, \quad \text{et de même} \quad d_3\alpha_1 = \frac{ds_3}{R_{13}}\alpha_3.$$

On aura ainsi

$$d\alpha_1 = \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\overline{\rho_1 X} + \frac{ds_2}{R_{12}}\alpha_2 + \frac{ds_3}{R_{13}}\alpha_3.$$

Enfin, le théorème de Hachette nous apprend que la courbure $\frac{1}{\rho_1}$ de la courbe MP_1 est la résultante des courbures des sections des surfaces λ_2 et λ_3 par leurs plans tangents réciproques, c'est-à-dire des courbures des sections normales de λ_2 et λ_3 tangentes à MP_1; donc, en projetant sur OX, on a

$$\frac{1}{\rho_1}\cos\overline{\rho_1 X} = \frac{1}{R_{21}}\cos\overline{R_{21}X} + \frac{1}{R_{31}}\cos\overline{R_{31}X},$$

ou, en ayant égard aux directions des rayons R et *convenant de regarder le rayon* R_{ik} *comme positif ou négatif suivant qu'il est dirigé dans le sens où* λ_i *diminue ou en sens contraire,*

$$\frac{1}{\rho_1}\cos\overline{\rho_1 X} = -\frac{1}{R_{21}}\alpha_2 - \frac{1}{R_{31}}\alpha_3.$$

Substituons dans la valeur ci-dessus de $d\alpha_1$, divisons par dt, ordonnons et raisonnons de même pour $d\alpha_2$, $d\alpha_3$; nous aurons

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= \left(\frac{1}{R_{12}}\frac{ds_2}{dt} - \frac{1}{R_{21}}\frac{ds_1}{dt}\right)\alpha_2 + \left(\frac{1}{R_{13}}\frac{ds_3}{dt} - \frac{1}{R_{31}}\frac{ds_1}{dt}\right)\alpha_3,\\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= \left(\frac{1}{R_{23}}\frac{ds_3}{dt} - \frac{1}{R_{32}}\frac{ds_2}{dt}\right)\alpha_3 + \left(\frac{1}{R_{21}}\frac{ds_1}{dt} - \frac{1}{R_{12}}\frac{ds_2}{dt}\right)\alpha_1,\\
\frac{d\alpha_3}{dt} &= \left(\frac{1}{R_{31}}\frac{ds_1}{dt} - \frac{1}{R_{13}}\frac{ds_3}{dt}\right)\alpha_1 + \left(\frac{1}{R_{32}}\frac{ds_2}{dt} - \frac{1}{R_{23}}\frac{ds_3}{dt}\right)\alpha_2.
\end{aligned}\right.$$

Mais $\frac{ds_1}{dt}$, $\frac{ds_2}{dt}$, $\frac{ds_3}{dt}$ représentent les composantes v_1, v_2, v_3 de la

vitesse du mobile suivant les directions MN_1, MN_2, MN_3; donc

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1}{dt} &= \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)\alpha_2 + \left(\frac{v_3}{R_{13}} - \frac{v_1}{R_{31}}\right)\alpha_3,\\
\frac{d\alpha_2}{dt} &= \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)\alpha_3 + \left(\frac{v_1}{R_{21}} - \frac{v_2}{R_{12}}\right)\alpha_1,\\
\frac{d\alpha_3}{dt} &= \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)\alpha_1 + \left(\frac{v_2}{R_{32}} - \frac{v_3}{R_{23}}\right)\alpha_2.
\end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs dans l'expression de $j_{n+1,x}$, à réunir les termes affectés d'un même cosinus α, pour trouver

$$\begin{aligned}
j_{n+1,x} = &\left[\frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{21}} - \frac{v_2}{R_{12}}\right)j_{n2} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)j_{n3}\right]\alpha_1\\
&+ \left[\frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{32}} - \frac{v_3}{R_{23}}\right)j_{n3} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)j_{n1}\right]\alpha_2\\
&+ \left[\frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{13}} - \frac{v_1}{R_{31}}\right)j_{n1} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)j_{n2}\right]\alpha_3.
\end{aligned}$$

Les valeurs des projections de j_{n+1} sur deux autres axes OY, OZ perpendiculaires à OX ne différeraient que par la substitution des cosinus directeurs relatifs à OY, OZ; donc, en raisonnant comme au n° 39, on voit que les composantes de l'accélération d'ordre $n+1$, suivant les directions MN_1, MN_2, MN_3, sont précisément

$$(62) \quad . \; . \quad \left\{\begin{aligned}
j_{n+1,1} &= \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{21}} - \frac{v_2}{R_{12}}\right)j_{n2} + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right)j_{n3},\\
j_{n+1,2} &= \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{32}} - \frac{v_3}{R_{23}}\right)j_{n3} + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right)j_{n1},\\
j_{n+1,3} &= \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{13}} - \frac{v_1}{R_{31}}\right)j_{n1} + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right)j_{n2}.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules cherchées, servant à passer des composantes j_{n1}, j_{n2}, j_{n3} aux composantes de j_{n+1} suivant les mêmes directions.

Par exemple, si nous supposons $n=0$, les composantes de j_n deviennent celles de la simple vitesse v, et nous trouvons, pour les composantes de l'accélération du premier ordre en coordonnées curvilignes,

$$\left\{\begin{aligned} j_{11} &= \frac{dv_1}{dt} + \left(\frac{v_1}{R_{21}} - \frac{v_2}{R_{12}}\right) v_2 + \left(\frac{v_1}{R_{31}} - \frac{v_3}{R_{13}}\right) v_3, \\ j_{12} &= \frac{dv_2}{dt} + \left(\frac{v_2}{R_{32}} - \frac{v_3}{R_{23}}\right) v_3 + \left(\frac{v_2}{R_{12}} - \frac{v_1}{R_{21}}\right) v_1, \\ j_{13} &= \frac{dv_3}{dt} + \left(\frac{v_3}{R_{13}} - \frac{v_1}{R_{31}}\right) v_1 + \left(\frac{v_3}{R_{23}} - \frac{v_2}{R_{32}}\right) v_2. \end{aligned}\right.$$

On retrouve les formules que Lamé (*Leçons sur les coordonnées curvilignes*, p. 165) a obtenues par une voie beaucoup plus longue (les différences de signe tiennent à un choix différent pour le sens des rayons de courbure positifs). On en déduirait sans peine, en se servant des formules (62), les composantes j_{21}, j_{22}, j_{23} de la suraccélération, et ainsi de suite.

41'. Il est facile d'introduire dans les équations (62), au lieu des vitesses v_i et des rayons de courbure, les paramètres des surfaces orthogonales.

Si, avec Lamé, nous désignons par h_1, h_2, h_3 les paramètres différentiels du premier ordre des surfaces λ_1, λ_2, λ_3, savoir

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda_i}{\partial z}\right)^2},$$

on sait, par des formules bien connues, que l'on a

$$ds_1 = \frac{d\lambda_1}{h_1}, \quad ds_2 = \frac{d\lambda_2}{h_2}, \quad ds_3 = \frac{d\lambda_3}{h_3},$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{R_{ik}} = -\frac{h_i}{h_k}\frac{\partial h_k}{\partial\lambda_i} \quad (*).$$

(*) LAMÉ, ouv. cité, p. 51.

On aura donc aussi

$$v_1 = \frac{ds_1}{dt} = \frac{1}{h_1}\frac{d\lambda_1}{dt}, \quad \text{etc.}$$

et de simples substitutions donneront définitivement

$$(62') \left\{ \begin{aligned} j_{n+1,1} &= \frac{dj_{n1}}{dt} + \left(\frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_1}{dt}\right) j_{n2} + \left(\frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_1}{dt}\right) j_{n3}, \\ j_{n+1,2} &= \frac{dj_{n2}}{dt} + \left(\frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_2}{dt}\right) j_{n3} + \left(\frac{h_2}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_2}{dt}\right) j_{n1}, \\ j_{n+1,3} &= \frac{dj_{n3}}{dt} + \left(\frac{h_3}{h_1^2}\frac{\partial h_1}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_1}{dt} - \frac{h_1}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_1}\frac{d\lambda_3}{dt}\right) j_{n1} + \left(\frac{h_3}{h_2^2}\frac{\partial h_2}{\partial\lambda_3}\frac{d\lambda_2}{dt} - \frac{h_2}{h_3^2}\frac{\partial h_3}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_3}{dt}\right) j_{n2}. \end{aligned} \right.$$

Pour $n = 0$, on retrouverait les formules données par Guiraudet dans sa thèse de 1856 et reproduites par lui dans ses *Recherches sur la dynamique d'un point matériel* (*), page 13, et par Lamé dans ses *Leçons sur les coordonnées curvilignes.*

41″. Nous appliquerons seulement nos formules au système orthogonal composé des sphères de rayon r, des cônes de révolution d'ouverture angulaire θ, et des plans φ passant par l'axe des cônes (coordonnées sphériques). On obtient ici *directement*, en affectant l'indice 1 aux sphères, l'indice 2 aux cônes, l'indice 3 aux plans, les valeurs

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin\theta \, d\psi,$$

d'où les valeurs de v_1, v_2 v_3; puis

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{R_{13}} = \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{R_{21}} = 0, \quad \frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{r \operatorname{tang} \theta},$$

$$\frac{1}{R_{31}} = 0, \quad \frac{1}{R_{32}} = 0.$$

(*) *Mémoires de la Société des sciences de Lille*, 1856.

Substitution faite dans les équations (62), on a pour les composantes cherchées

$$
(63) \quad \ldots \quad \left\{
\begin{aligned}
j_{n+1,r} &= \frac{dj_{nr}}{dt} - j_{n\theta}\frac{d\theta}{dt} - j_{n\psi}\sin\theta\frac{d\psi}{dt},\\
j_{n+1,\theta} &= \frac{dj_{n\theta}}{dt} + j_{nr}\frac{d\theta}{dt} - j_{n\psi}\cos\theta\frac{d\psi}{dt},\\
j_{n+1,\psi} &= \frac{dj_{n\psi}}{dt} + j_{nr}\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + j_{n\theta}\cos\theta\frac{d\psi}{dt}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $n = 0$, comme $j_{or} = v_r = \frac{dr}{dt}$, etc..., on a, après des réductions faciles,

$$
\left\{
\begin{aligned}
j_{1r} &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\sin^2\theta\frac{d\psi^2}{dt^2},\\
j_{1\theta} &= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2},\\
j_{1\psi} &= r\sin\theta\frac{d^2\psi}{dt^2} + 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} + 2r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt},
\end{aligned}
\right.
$$

ce qui s'accorde avec les formules de Guiraudet et de Lamé pour l'accélération du premier ordre. De même, pour les composantes de la suraccélération en coordonnées sphériques, on trouvera par les formules (63), en faisant $n = 1$,

$$
\left\{
\begin{aligned}
j_{2r} &= \frac{d^3r}{dt^3} - 3\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) - 3\sin\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt} - 3r\sin^2\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^3},\\
j_{2\theta} &= r\frac{d^3\theta}{dt^3} + 3\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) - 3r\sin\theta\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d^2\psi}{dt^2} - r\frac{d\theta^3}{dt^3} - 5\cos\theta\frac{d\psi^2}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt},\\
j_{2\psi} &= r\sin\theta\frac{d^3\psi}{dt^3} + 3\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{d.r\sin\theta}{dt} + 3\frac{d\psi}{dt}\left(\sin\theta\frac{d^2r}{dt^2} + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) - r\sin\theta\frac{d\psi^3}{dt}\\
&\quad + 6\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} - 3r\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\frac{d\theta^2}{dt^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

On voit que les formules se compliquent rapidement, mais la méthode est aussi simple que sûre.

Nous ferons encore remarquer que les formules (63), lorsqu'on y suppose ψ constamment égal à zéro, donnent les équations trouvées par M. Laisant pour les composantes, en coordonnées polaires, des accélérations planes (*).

L'application aux coordonnées elliptiques se ferait égalcment sans difficulté, mais le calcul ne nous a pas paru conduire à des conclusions spécialement remarquables.

§ 8. *Sur les accélérations d'ordre quelconque dans le mouvement d'une figure plane dans son plan.*

42. Faisons d'abord une remarque très simple que nous aurons à appliquer souvent : si un rayon OM $= r$ tourne autour de l'origine O, dans le sens de OY vers OX, et si l'on désigne par $\cos \overline{rx}$, $\cos \overline{ry}$ les cosinus directeurs du rayon OM, ceux de la vitesse du point M seront $\cos \overline{ry}$, $-\cos \overline{rx}$.

Cela posé, considérons une figure plane qui se meut dans son plan d'une manière quelconque et est rapportée à deux axes rectangulaires fixes OX, OY. Soient α, β les coordonnées du centre instantané de rotation C, et ω la vitesse angulaire à l'époque t, ω étant positif de OY vers OX ; x, y les coordonnées d'un point M de la figure mobile. Les composantes de la vitesse de ce point seront, d'après la remarque ci-dessus,

$$(64) \quad \ldots \quad v_x = \omega(y-\beta), \quad v_y = -\omega(x-\alpha).$$

Si l'on dérive ces équations par rapport au temps pour en déduire les composantes de l'accélération du point M, on est amené à conclure que les composantes de l'accélération d'ordre quelconque $n-1$ auraient des expressions de la forme suivante :

$$j_{n-1,x} = p_{n-1}(x-\alpha) + q_{n-1}(y-\beta) + J_{n-1,x},$$
$$j_{n-1,y} = p_{n-1}(y-\beta) - q_{n-1}(x-\alpha) + J_{n-1,y},$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878, p. 496.

p_{n-1}, q_{n-1}, $J_{n-1,x}$, $J_{n-1,y}$ étant des quantités indépendantes du choix du point M, et dont les deux dernières sont évidemment les composantes de l'accélération d'ordre $n - 1$ du point C, supposé lié à la figure mobile. Prenons les dérivées par rapport à t, et remplaçons v_x, v_y par leurs valeurs (64), nous aurons, l'accent $'$ désignant toujours une dérivée relative au temps,

$$j_{nx} = (p'_{n-1} - q_{n-1}\omega)(x - \alpha) + (q'_{n-1} + p_{n-1}\omega)(y - \beta) + \frac{dJ_{n-1,x}}{dt} - p_{n-1}\frac{d\alpha}{dt} - q_{n-1}\frac{d\beta}{dt}.$$

Mais

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt},$$

sont les composantes de la vitesse w avec laquelle le centre instantané C se déplace sur le plan fixe ou parcourt la roulette fixe.

On a donc, en opérant d'ailleurs de même pour j_{ny},

$$j_{nx} = (p'_{n-1} - q_{n-1}\omega)(x - \alpha) + (q'_{n-1} + p_{n-1}\omega)(y - \beta) + \frac{dJ_{n-1,x}}{dt} - p_{n-1}w_x - q_{n-1}w_y,$$

$$j_{ny} = (p'_{n-1} - q_{n-1}\omega)(y - \beta) - (q'_{n-1} + p_{n-1}\omega)(x - \alpha) + \frac{dJ_{n-1,y}}{dt} - p_{n-1}w_y + q_{n-1}w_x.$$

Si donc on pose, pour abréger,

$$(65) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} p_n = p'_{n-1} - q_{n-1}\omega, \\ q_n = q'_{n-1} + p_{n-1}\omega, \end{cases}$$

$$(66) \quad \ldots \quad \begin{cases} J_{nx} = \dfrac{dJ_{n-1,x}}{dt} - p_{n-1}w_x - q_{n-1}w_y, \\ J_{ny} = \dfrac{dJ_{n-1,y}}{dt} - p_{n-1}w_y + q_{n-1}w_x. \end{cases}$$

on trouvera, pour les composantes parallèles à OX, OY de l'accélération d'ordre n d'un point quelconque,

$$(67) \quad . \ . \ . \left\{ \begin{array}{l} j_{nx} = p_n(x-\alpha) + q_n(y-\beta) + J_{nx}, \\ j_{ny} = p_n(y-\beta) - q_n(x-\alpha) + J_{ny}, \end{array} \right.$$

et il suffit de comparer ces expressions avec celles posées plus haut pour reconnaître que les formules (67), supposées vraies pour l'accélération d'ordre $n-1$, seront vraies pour l'accélération d'ordre n, pourvu que la loi de formation des quantités p_n, q_n, J_{nx}, J_{ny} soit donnée par les équations (65) et (66).

Or, les équations (64) montrent que les équations (67) ont lieu pour $n=0$ [$j_0 = v$, $p_0 = 0$, $q_0 = \omega$, $J_0 = 0$], donc elles ont lieu pour toute valeur de n, et les formules (65), (66), (67) renferment toute la loi de formation des composantes de l'accélération d'ordre n.

43. Ces relations conduisent à de nombreuses conséquences. Remarquons d'abord qu'en général les cosinus directeurs du rayon vecteur u, mené du centre instantané C au point M, ayant pour valeurs $\frac{x-\alpha}{u}$, $\frac{y-\beta}{u}$, ceux de la vitesse de M seront, d'après la remarque ci-dessus, $\frac{y-\beta}{u}$, $-\frac{x-\alpha}{u}$; les équations (67) montrent alors immédiatement que

L'accélération d'ordre n *d'un point quelconque* M *de la figure est la résultante* 1° *d'une accélération normale* — $p_n u$ *dirigée du point* M *vers le centre instantané de rotation;* 2° *d'une accélération tangentielle* $q_n u$ *dans le sens de la vitesse* v *du point* M; 3° *d'une accélération* J_n *qui est la même quel que soit le point* M, *et qui est égale et parallèle à l'accélération d'ordre* n *du centre instantané* C, *supposé lié à la figure mobile.*

Il est clair que les signes de p_n, q_n déterminent le sens dans lequel les deux premières accélérations doivent être portées.

Il suit de là que, si φ désigne l'angle du rayon vecteur CM avec l'accélération J_n, compté à partir de cette dernière en sens contraire de la rotation ω, les composantes normale et tangentielle de l'accélération j_n auront pour valeurs respectivement

$$-p_n u - J_n \cos\varphi, \quad q_n u + J_n \sin\varphi.$$

Le lieu des points de la figure mobile dont l'accélération normale d'ordre n est nulle à l'instant considéré a pour équation

$$(68) \quad \dots\dots\dots \quad u = -\frac{J_n}{p_n} \cos \varphi,$$

c'est un cercle dont le diamètre CP, dirigé suivant l'accélération J_n, a une longueur égale à $-\frac{J_n}{p_n}$.

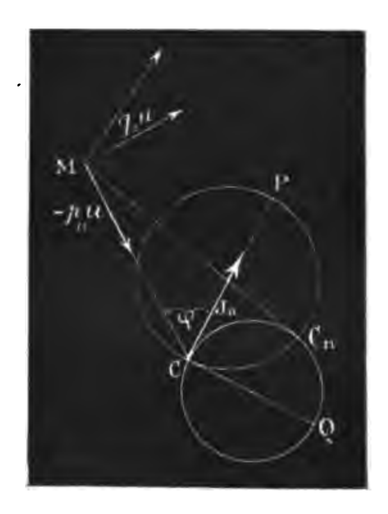


Fig. 2.

De même, le lieu des points dont l'accélération tangentielle d'ordre n est nulle, a pour équation

$$(69) \quad \dots\dots\dots \quad u = -\frac{J_n}{q_n} \sin \varphi;$$

c'est un second cercle dont le diamètre CQ a une longueur $\frac{J_n}{q_n}$, et fait avec l'accélération J_n un angle de 90° dans le sens de la rotation ω. Ces deux cercles se coupent au centre instantané et en un second point C_n dont l'accélération totale d'ordre n est évidemment nulle; c'est *le centre instantané d'ordre* n, qui se détermine ainsi par une voie toute semblable à celle par laquelle

on trouve le centre instantané des accélérations du premier ordre. Soient α_n, β_n les coordonnées de ce point. Les équations (67) donneront

$$p_n(\alpha_n - \alpha) + q_n(\beta_n - \beta) + J_{nx} = 0,$$
$$p_n(\beta_n - \beta) - q_n(\alpha_n - \alpha) + J_{ny} = 0;$$

et si l'on retranche ces équations respectivement membre à membre des relations (67), on aura, pour les composantes de l'accélération d'un point quelconque M,

$$(70) \quad \ldots \quad \begin{cases} j_{nx} = p_n(x - \alpha_n) + q_n(y - \beta_n), \\ j_{ny} = p_n(y - \beta_n) - q_n(x - \alpha_n). \end{cases}$$

Ces équations montrent que si l'on désigne par u_n le rayon mené du centre C_n au point M, *l'accélération* j_n *de ce dernier point se compose 1° d'une accélération dirigée vers le centre* C_n *et qui a pour valeur* $-p_n u_n$; *2° d'une accélération* $q_n u_n$ *perpendiculaire à* $C_n M$ *dans le sens de la rotation* ω. *L'accélération* j_n *du point* M *est donc la même, en grandeur et en direction, que si la figure plane tournait autour du point* C_n *comme autour d'un point fixe, avec sa vitesse angulaire variable* ω. Ce qui justifie le nom de centre instantané des accélérations d'ordre n donné au point C_n.

44. Des équations (68) et (69), il résulte encore que, δ_n désignant la distance CC_n du centre instantané de rotation au centre instantané d'ordre n, on a

$$p_n\delta_n = -J_n \cos \overline{J_n\delta_n}, \quad q_n\delta_n = -J_n \sin \overline{J_n\delta_n},$$

et par suite

$$(71) \quad \ldots \quad \begin{cases} \delta_n = \dfrac{J_n}{\sqrt{p_n^2 + q_n^2}}, \quad \cos \overline{J_n\delta_n} = -\dfrac{p_n}{\sqrt{p_n^2 + q_n^2}}, \\ \sin \overline{J_n\delta_n} = -\dfrac{q_n}{\sqrt{p_n^2 + q_n^2}}. \end{cases}$$

45. Nous allons faire l'application de cette théorie générale aux accélérations des premiers ordres.

Les équations (64), comme on l'a vu, rentrent dans les équations (67) si l'on fait

$$n = 0, \quad j_0 = v, \quad p_0 = 0, \quad q_0 = \omega, \quad J_{0x} = 0, \quad J_{0y} = 0.$$

Si l'on fait ensuite $n = 1$, les équations (65), (66), (67) donneront

$$p_1 = -\omega^2, \quad q_1 = \omega', \quad J_{1x} = -\omega w_y, \quad \delta_{1y} = \omega w_x,$$

$$(72) \quad . \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} j_x = -\omega^2 (x-\alpha) + \omega' (y-\beta) - \omega w_y, \\ j_y = -\omega^2 (y-\beta) - \omega' (x-\alpha) + \omega w_x, \end{array} \right.$$

ce qui donne les composantes de l'accélération j_1 ou j, parallèlement à deux axes rectangulaires quelconques. Pour simplifier, on prendra l'axe des x suivant la vitesse de déplacement w du centre instantané; l'axe des y à 90° en sens contraire de la rotation ω. On aura $w_x = w$, $w_y = 0$, d'où

$$J_x = 0, \quad J_y = \omega w,$$

c'est-à-dire que l'accélération du point de la figure mobile qui coïncide actuellement avec le centre instantané est égale à ωw, et sa direction s'obtient en faisant tourner celle de la vitesse w de 90° en sens contraire de la rotation ω.

Le diamètre CP du cercle des accélérations normales nulles a même direction que J; il est égal (43) à

$$-\frac{J}{p_1} = \frac{\omega w}{\omega^2} = \frac{w}{\omega}.$$

Le diamètre CQ du cercle des accélérations tangentielles nulles est dirigé suivant CX ou w et a pour valeur $\frac{\omega w}{\omega'}$; l'intersection de ces deux cercles donne le *centre instantané* C_1 *des accélérations du premier ordre,* à une distance

$$\delta_1 = \frac{\omega w}{\sqrt{\omega^4 + \omega'^2}},$$

du point C, l'angle PCC_1 ayant pour tangente $-\frac{\omega'}{\omega^2}$. Les composantes normale et tangentielle de l'accélération j d'un point M auront les valeurs connues; enfin, l'accélération j sera la résultante d'une accélération $\omega^2 u_1$ dirigée de M vers C_1, et d'une accélération $\omega' u_1$ normale au rayon $C_1M = u_1$.

46. En faisant $n = 2$ dans les formules (65), (66), (67), et partant des valeurs trouvées plus haut

$$p_1 = -\omega^2, \quad q_1 = \omega', \quad J_{1x} = -\omega w_y, \quad J_{1y} = \omega w_x,$$

on aura successivement et sans peine

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_2 = -3\omega\omega', & q_2 = \omega'' - \omega^3, \\ J_{2x} = \omega^2 w_x - 2\omega' w_y - \omega w_{1y}, & J_{2y} = \omega^2 w_y + 2\omega' w_x + \omega w_{1x}, \end{array} \right.$$

$w_{1x} = \frac{dw_x}{dt}$, $w_{1y} = \frac{dw_y}{dt}$ étant les composantes de l'accélération du premier ordre w_1 du point mobile qui coïncide à chaque instant avec le centre instantané de rotation. Le mouvement de ce point est une des données essentielles du déplacement de la figure plane, en sorte que w_1 est supposé donné en grandeur et en direction. Puis

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} j_{2x} = -3\omega\omega'(x-\alpha) + (\omega'' - \omega^3)(y-\beta) + J_{2x}, \\ j_{2y} = -3\omega\omega'(y-\beta) - (\omega'' - \omega^3)(x-\alpha) + J_{2y}, \end{array} \right.$$

seront les composantes de la suraccélération d'un point quelconque M de la figure mobile.

Le diamètre CP du cercle des suraccélérations normales nulles est égal à

$$\frac{J_2}{3\omega\omega'},$$

et dirigé suivant la suraccélération J_2 du point C de la figure mobile; le diamètre CQ du cercle des suraccélérations tangentielles nulles a pour valeur

$$\frac{J_2}{\omega'' - \omega^3},$$

il est perpendiculaire au précédent. L'intersection C_2 de ces deux cercles est le ***centre instantané des suraccélérations*** ou centre instantané du deuxième ordre. Si l'on désigne par α_2, β_2 ses coordonnées, on pourra mettre les équations (74) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} j_{2x} &= -3\omega\omega'(x-\alpha_2) + (\omega''-\omega^3)(y-\beta_2), \\ j_{2y} &= -3\omega\omega'(y-\beta_2) - (\omega''-\omega^3)(x-\alpha_2), \end{aligned}\right.$$

en sorte que la suraccélération j_2 aura une composante $3\omega\omega' u_2$ dirigée de M vers C_2, et une composante $(\omega''-\omega^3)u_2$ perpendiculaire au rayon $C_2M = u_2$.

47. Les composantes J_{2x}, J_{2y} de la suraccélération du point C de la figure mobile, données par les équations (73), montrent que J_2 est la résultante de trois accélérations : 1° l'une est égale à ωw et dirigée suivant w ; 2° la deuxième a pour valeur $2\omega' w$ et sa direction s'obtient en faisant tourner celle de w de 90° en sens contraire de ω'' ; 3° enfin, la troisième est égale à ωw_1 et fait un angle droit avec l'accélération w_1, en sens contraire de ω.

Il est donc facile de construire J_2. Ses composantes s'expriment plus simplement si l'on prend pour axes coordonnés, comme au n° 45, la tangente et la normale à la roulette fixe ; on a

$$w_x = w, \quad w_y = 0, \quad w_{1x} = \frac{dw}{dt} = w', \quad w_{1y} = -\frac{w^2}{R},$$

R étant le rayon de courbure de la roulette fixe, pris avec le signe + ou le signe — suivant le sens dans lequel il est dirigé (voir n° 40). On trouve alors

$$J_{2x} = \omega w\left(w + \frac{w}{R}\right), \quad J_{2y} = 2\omega' w + \omega w'.$$

48. Si l'on veut pousser jusqu'aux accélérations du troisième ordre, on fera dans les équations (65) et (66) $n = 3$, et l'on substituera les valeurs ci-dessus

$$p_2 = -3\omega\omega', \quad q_2 = \omega'' - \omega^3, \quad J_{2x} = \omega^2 w_x - 2\omega' w_y - \omega w_{1y},$$
$$J_{2y} = \omega^2 w_y + 2\omega' w_x + \omega w_{1x},$$

et l'on trouvera, en faisant les réductions et désignant par w_2 la suraccélération du point mobile qui coïncide à chaque instant avec le centre instantané C,

$$(75) \quad \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} p_3 = \omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega'', \\ q_3 = \omega''' - 6\omega^2\omega', \end{array} \right.$$

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{3x} = 5\omega\omega' w_x - (3\omega'' - \omega^3)\, w_y + \omega^2 w_{1x} - 3\omega' w_{1y} - \omega w_{2y}, \\ J_{3y} = 5\omega\omega' w_y + (3\omega'' - \omega^3)\, w_x + \omega^2 w_{1y} + 3\omega' w_{1x} + \omega w_{2x}. \end{array} \right.$$

Ayant ainsi p_3, q_3, J_{3x}, J_{3y}, on aura, au moyen des équations (65),

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{3x} = (\omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega'')(x - \alpha) + (\omega''' - 6\omega^2\omega')(y - \beta) + J_{3x}, \\ j_{3y} = (\omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega'')(y - \beta) - (\omega''' - 6\omega^2\omega')(x - \alpha) + J_{3y}, \end{array} \right.$$

pour les composantes, parallèles à deux axes rectangulaires, de l'accélération du troisième ordre d'un point quelconque M. Puis, les formules du n° 43 donneront, pour le diamètre CP du cercle des accélérations normales nulles, dirigé suivant l'accélération J_3 du point C de la figure mobile,

$$CP = -\frac{J_3}{\omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega''},$$

et par le diamètre CQ du cercle des accélérations tangentielles nulles, à mener normalement à J_3, dans le sens de la rotation ω,

$$\frac{J_3}{\omega''' - 6\omega^2\omega'}.$$

L'intersection C_3 de ces deux cercles sera le *centre instantané du troisième ordre*; ses coordonnées étant désignées par α_3, β_3, et sa distance C_3M à un point quelconque de la figure par u_3, on trouvera

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{3x} = (\omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega'')(x - \alpha_3) + (\omega''' - 6\omega^2\omega')(y - \beta_3), \\ j_{3y} = (\omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega'')(y - \beta_3) - (\omega''' - 6\omega^2\omega')(x - \alpha_3); \end{array} \right.$$

ce qui montre que *l'accélération j_3 du point* M *est la résultante de deux accélérations*

$$-(\omega^4 - 3\omega'^2 - 4\omega\omega'')\, u_3, \quad (\omega''' - 6\omega^2\omega')\, u_3,$$

la première dirigée de M *vers* C_3, *la seconde perpendiculairement à* MC_3 *et dans le sens de la rotation* ω.

Les formules (76) donnent immédiatement les deux composantes de l'accélération J_3 du point C, en grandeur et en direction, au moyen de w, w_1, w_2, qui sont toujours censés connus pour que le mouvement de la figure soit défini. On simplifie les composantes J_{3_x}, J_{3_y} en les rapportant aux mêmes axes que ci-dessus, et en faisant usage des formules (60) pour le calcul des composantes tangentielle et normale de w_2. On a ainsi

$$w_x = w, \quad w_y = 0, \quad w_{1_x} = w', \quad w_{1_y} = -\frac{w^2}{R},$$

$$w_{2_x} = w'' - \frac{w^3}{R^2}, \quad w_{2_y} = -\frac{3ww'}{R} + \frac{w^3}{R^2}\frac{dR}{ds},$$

R étant affecté d'un signe convenable. Il en résulte

$$\left\{\begin{aligned} J_{3_x} &= 3\omega\omega' w + \omega^2 w' + \frac{3\omega' w^2}{R} + \frac{3\omega w w'}{R} - \frac{\omega w^3}{R^2}\frac{dR}{ds}, \\ J_{3_y} &= (3\omega'' - \omega^3)\, w - \frac{\omega^2 w^2}{R^2} + 3\omega' w' + \omega w'' - \frac{\omega w^3}{R^2}. \end{aligned}\right.$$

pour les composantes, suivant la tangente et la normale à la roulette fixe, de l'accélération du troisième ordre du point C, lié à la figure mobile.

On voit qu'il est inutile de pousser plus loin ces calculs; la formation des accélérations de différents ordres n'offre aucune difficulté, non plus que la détermination des centres instantanés successifs. Mais on obtient des résultats plus simples lorsque l'on suppose la *vitesse angulaire* ω *constante*, ce que l'on peut toujours faire, évidemment, lorsqu'on n'a en vue que la *géométrie cinématique*, puisque la suite des positions de la figure mobile

dépend uniquement du rapport $w : \omega$ à chaque instant. Il sera utile, pour développer ces conséquences, de simplifier les formules fondamentales en y introduisant les imaginaires.

49. Les formules (65) donnent évidemment, i désignant le symbole $\sqrt{-1}$,

$$p_n + q_n i = (p'_{n-1} + q'_{n-1} i) + \omega i (p_{n-1} + q_{n-1} i),$$

et en posant

$$(77) \quad \ldots \ldots \quad p_n + q_n i = \mathrm{P}_n e^{\mathrm{Q}_n i} = \mathrm{V}_n,$$

on aura, pour déterminer, P_n, Q_n, et, par suite, p_n, q_n,

$$(78) \quad \ldots \ldots \quad \mathrm{V}_n = \dot{\mathrm{V}}'_{n-1} + \mathrm{V}_{n-1} \omega i,$$

relation très simple dans laquelle l'accent $'$ désigne toujours une dérivée par rapport au temps.

Les formules (66) peuvent aussi être condensées en une seule, et si l'on désigne par $\overline{\mathrm{J}_n \mathrm{X}}$, $\overline{w\mathrm{X}}$ les angles que les directions de J_n et de w forment avec la direction choisie pour axe des x, on aura, en ajoutant ces équations après avoir multiplié la seconde par i,

$$\mathrm{J}_{nx} + \mathrm{J}_{ny} i = \frac{d}{dt}(\mathrm{J}_{n-1,x} + \mathrm{J}_{n-1,y} i) - (p_{n-1} - q_{n-1} i)(w_x + w_y i),$$

ou

$$(79) \quad \ldots \quad \mathrm{J}_n e^{\overline{\mathrm{J}_n \mathrm{X}} i} = \left(\mathrm{J}_{n-1} e^{\overline{\mathrm{J}_{n-1} \mathrm{X}} i}\right)' - \mathrm{P}_{n-1} w e^{(\overline{w\mathrm{X}} - \mathrm{Q}_{n-1}) i},$$

équation dont il serait facile de donner l'interprétation cinématique, donnant la construction de J_n en grandeur et en direction.

Enfin, les équations (70) donnent, en désignant par θ_n l'angle que fait la direction $\mathrm{C}_n\mathrm{M} = u_n$ avec l'axe des x, d'où

$$x - \alpha_n = u_n \cos \theta_n, \quad y - \beta_n = u_n \sin \theta_n,$$

l'équation suivante, par une combinaison analogue,

$$j_{nx} + j_{ny} i = (p_n - q_n i)\left[(x - \alpha_n) + (y - \beta_n) i\right],$$

ou

$$j_n e^{\overline{j_n X} i} = P_n u_n e^{(\theta_n - Q_n) i};$$

d'où l'on tire immédiatement

(80) . . . . . $j_n = P_n u_n, \quad \overline{j_n X} = \theta_n - Q_n.$

Les quantités P_n, Q_n, fournies par l'équation (78), permettront donc de construire immédiatement l'accélération j_n, en grandeur et en direction, au moyen du centre instantané C_n.

Remarquons enfin, pour la construction de ce dernier point, que l'équation (77) nous donne

$$p_n = P_n \cos Q_n, \quad q_n = P_n \sin Q_n,$$

et que, par suite, les formules (69) deviennent

$$\delta_n = \frac{J_n}{P_n}, \quad \cos \overline{J_n \delta_n} = -\cos Q_n, \quad \sin \overline{J_n \delta_n} = -\sin Q_n,$$

d'où enfin

(81) . . . . . $\delta_n = \frac{J_n}{P_n}, \quad \overline{J_n \delta_n} = Q_n - \pi.$

50. Supposons maintenant que la vitesse angulaire ω soit constante; ω', ω'', ... seront nuls. Comme on voit, par les valeurs de p_0, q_0 et les formules (65), que p_n, q_n ne dépendent dans le cas général que de ω et de ses dérivées par rapport au temps, il suit immédiatement de l'hypothèse que p_n, q_n seront indépendants du temps, donc aussi P_n, Q_n. L'équation (78) se réduit, V'_{n-1} étant nul, à

$$V_n = V_{n-1} \omega i,$$

ou

$$P_n e^{Q_n i} = P_{n-1} e^{Q_{n-1} i} \omega i,$$

d'où

$$P_n = P_{n-1} \omega, \quad Q_n = Q_{n-1} + \frac{\pi}{2},$$

et par suite, puisque $p_0 = 0$, $q_0 = \omega$ donnent

$$P_0 = \omega, \quad Q_0 = \frac{\pi}{2},$$

nous aurons

$$(82) \quad . \; . \; . \; . \; . \; P_n = \omega^{n+1}, \quad Q_n = \frac{n+1}{2}\pi.$$

Telles sont les valeurs très simples de P_n, Q_n lorsque la vitesse angulaire de rotation est supposée invariable. On en déduit

$$p_n = \omega^{n+1} \cos \frac{n+1}{2}\pi, \quad q_n = \omega^{n+1} \sin \frac{n+1}{2}\pi,$$

en sorte que, si n est pair, p_n est nul; si n est impair, c'est q_n. De là quelques conséquences intéressantes.

1° Si n est *pair*, le diamètre CP du cercle des accélérations normales nulles devient infini [éq. (68)], ce cercle se réduit à une droite perpendiculaire à la direction de J_n, le centre instantané C_n se trouve donc sur la normale CQ à cette direction, au point où elle coupe le cercle des accélérations tangentielles nulles.

2° Si n est *impair*, q_n étant nul, le diamètre CQ du cercle des accélérations tangentielles nulles est infini, ce cercle se réduit à une droite coïncidant avec la direction de J_n, et le point C_n est sur cette direction, au point où elle coupe le cercle des accélérations nulles.

On retrouve ici des propriétés données par M. Nicolaïdès. (*Théorie du mouvement d'une figure plane*, premier mémoire).

Les formules (81) nous donnent d'ailleurs, pour le cas que nous considérons,

$$\delta_n = \frac{J_n}{\omega^{n+1}}, \quad \overline{J_n \delta_n} = \frac{n-1}{2}\pi,$$

ce qui conduit aux mêmes conclusions.

Enfin, nous tirons des équations (80)

$$j_n = \omega^{n+1} u_n, \quad \overline{j_n X} = \theta_n - \frac{n+1}{2}\pi,$$

et nous avons ce théorème : *Lorsque la vitesse angulaire* ω *est invariable, l'accélération d'ordre* n *d'un point quelconque* M *est le produit de sa distance au centre instantané d'ordre* n *par* ω^{n+1}, *et sa direction s'obtient en faisant tourner le rayon vecteur* C_nM *autour du point* C_n, *dans le sens de la rotation* ω, *de* (n + 1) *angles droits.*

51. Cela posé, reprenons les équations (70), dérivons les deux membres par rapport à t, et remplaçons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs (64); nous aurons

$$(83)\quad \begin{cases} j_{n+1,x} = p'_n(x-\alpha_n) + q'_n(y-\beta_n) + p_n\omega(y-\beta) - q_n\omega(x-\alpha) \\ \qquad\qquad - p_n\dfrac{d\alpha_n}{dt} - q_n\dfrac{d\beta_n}{dt}; \\ j_{n+1,y} = p'_n(y-\beta_n) - q'_n(x-\alpha_n) - p_n\omega(x-\alpha) - q_n\omega(y-\beta) \\ \qquad\qquad - p_n\dfrac{d\beta_n}{dt} + q_n\dfrac{d\alpha_n}{dt}. \end{cases}$$

Nous transformons d'abord ces équations, en faisant usage des relations (65), dans les suivantes :

$$j_{n+1,x} = p_{n+1}(x-\alpha_n) + q_{n+1}(y-\beta_n) - p_n\left[\frac{d\alpha_n}{dt} - \omega(\beta_n-\beta)\right]$$
$$- q_n\left[\frac{d\beta_n}{dt} + \omega(\alpha_n-\alpha)\right],$$

$$j_{n+1,y} = p_{n+1}(y-\beta_n) - q_{n+1}(x-\alpha_n) - p_n\left[\frac{d\beta_n}{dt} + \omega(\alpha_n-\alpha)\right]$$
$$+ q_n\left[\frac{d\alpha_n}{dt} - \omega(\beta_n-\beta)\right].$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{d\alpha_n}{dt},\quad \frac{d\beta_n}{dt}$$

sont les composantes de la *vitesse de déplacement* du centre

instantané C_n, que nous désignerons par $w^{(n)}$; tandis que

$$\omega(\beta_n - \beta), \quad -\omega(\alpha_n - \alpha)$$

sont les composantes de la vitesse d'entrainement de ce point, due à la rotation de la figure autour du centre de rotation C. On en conclut, en désignant par U_n la vitesse relative du point C_n par rapport à la figure mobile,

$$U_{nx} = \frac{d\alpha_n}{dt} - \omega(\beta_n - \beta),$$

$$U_{ny} = \frac{d\beta_n}{dt} + \omega(\alpha_n - \alpha),$$

et les formules ci-dessus prendront la forme plus simple

$$j_{n+1,x} = p_{n+1}(x - \alpha_n) + q_{n+1}(y - \beta_n) - p_n U_{nx} - q_n U_{ny},$$
$$j_{n+1,y} = p_{n+1}(y - \beta_n) - q_{n+1}(x - \alpha_n) - p_n U_{ny} + q_n U_{nx};$$

ou, sous une forme plus condensée, en désignant par γ_n l'angle que fait la direction de U_n avec l'axe des x,

$$(84) \quad . \quad . \quad j_{n+1}\, e^{\overline{j_{n+1}X}i} = P_{n+1} u_n e^{(\theta_n - Q_{n+1})i} - P_n U_n e^{(\gamma_n - Q_n)i}.$$

Cette équation est facile à traduire par une construction géométrique, mais nous ne considérerons que quelques cas particuliers remarquables.

52. Si, dans l'équation (84), nous posons $u_n = 0$, c'est-à-dire si nous faisons coïncider le point quelconque M avec le centre instantané d'ordre n, nous aurons pour déterminer l'accélération d'ordre $n + 1$ de ce point C_n, et l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, l'équation

$$J_{n+1}^{(n)}\, e^{\overline{J_{n+1}^{(n)}X}i} = -P_n U_n e^{(\gamma_n - Q_n)i},$$

c'est-à-dire

$$J_{n+1}^{(n)} = P_n U_n, \quad \overline{J_{n+1}^{(n)}X} = \gamma_n - Q_n + \pi,$$

équations qui, comparées avec les équations (80) qui donnent l'accélération d'ordre n d'un point quelconque, conduisent au théorème suivant : *Soit* $C_n U_n$ *la droite qui figure la vitesse, par rapport à la figure mobile, du centre instantané d'ordre* n ; *si l'on construit l'accélération d'ordre* n *du point* U_n, *supposé entraîné par la figure mobile, et si on lui fait décrire deux angles droits, on aura en grandeur et direction l'accélération d'ordre* n + 1 *du centre instantané d'ordre* n, *entraîné par la figure mobile.*

Dans le cas particulier où ω est constant, on a simplement

$$J_{n+1}^{(n)} = \omega^{n+1} U_n, \quad \overline{J_{n+1}^{(n)} X} = \gamma_n - \frac{n-1}{2}\pi.$$

Le théorème précédent se vérifie immédiatement pour le cas de $n = 0$. Alors C_n est le centre instantané de rotation C, sa vitesse relative est w, l'accélération J_1 du point C a pour expression ωw, et est dirigée normalement à la vitesse w (voir au n° 45).

53. Faisons coïncider, dans l'équation (84), le point M avec le centre instantané C_{n+1}, ce qui donnera $j_{n+1} = 0$, et l'équation (84) deviendra

$$P_{n+1} u_n e^{(\theta_n - Q_{n+1})i} = P_n U_n e^{(\gamma_n - Q_n)i}.$$

Les quantités u_n, θ_n se rapportent au centre instantané C_{n+1} ; si donc nous désignons par l_n la droite $C_n C_{n+1}$ et par φ_n l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, il viendra

$$P_{n+1} l_n = P_n U_n, \quad \varphi_n - Q_{n+1} = \gamma_n - Q_n,$$

ou encore

$$l_n = \frac{P_n}{P_{n+1}} U_n, \quad \varphi_n - \gamma_n = Q_{n+1} - Q_n,$$

ce qui détermine très simplement la grandeur et la direction de $C_n C_{n+1}$ au moyen de la vitesse U_n et de sa direction. Ainsi, lorsqu'on suppose la vitesse angulaire ω constante, on a

$$(85) \quad \ldots\ldots \quad l_n = \frac{U_n}{\omega}, \quad \varphi_n - \gamma_n = \frac{\pi}{2},$$

d'où résulte le théorème suivant :

Lorsque la vitesse angulaire de la figure mobile est invariable, la droite qui joint le centre instantané d'ordre n *à celui d'ordre* n + 1 *est égale à la vitesse relative* U_n *du premier divisée par la vitesse angulaire, et sa direction s'obtient en faisant tourner cette vitesse* U_n *d'un angle droit, en sens contraire de la rotation* ω (la dernière partie a été donnée par M. Nicolaïdès).

Ce qu'on peut exprimer d'une manière plus simple en disant que *la vitesse d'entraînement du point* C_{n+1} *dans la rotation autour du centre* C_n *est égale et parallèle à la vitesse du point* C_n.

54. On peut aussi transformer les équations (83) comme il suit :

$$\begin{cases} j_{n+1,x} = p_{n+1}(x-\alpha) + q_{n+1}(y-\beta) - p'_n(\alpha_n-\alpha) \quad q'_n(\beta_n-\beta) - p_n\dfrac{d\alpha_n}{dt} + q_n\dfrac{d\beta_n}{dt}, \\ j_{n+1,y} = p_{n+1}(y-\beta) - q_{n+1}(x-\alpha) - p'_n(\beta_n-\beta) + q'_n(\alpha_n-\alpha) - p_n\dfrac{d\beta_n}{dt} + q_n\dfrac{d\alpha_n}{dt}. \end{cases}$$

En désignant par ψ_n l'angle que fait la direction de la vitesse de déplacement $w^{(n)}$ du centre instantané C_n avec l'axe des x, ces équations se réduiront facilement à celle-ci :

$$(86) \qquad j_{n+1}e^{\overline{j_{n+1}X}i} = P_{n+1}ue^{(\theta-Q_{n+1})i} - \left(P_n e^{-Q_n i}\right)' \delta_n e^{\overline{\delta_n X}i} - P_n w^{(n)} e^{(\psi_n - Q_n)i},$$

l'accent ′ indiquant encore la dérivée par rapport à t.

Sans nous arrêter à la construction un peu compliquée que l'on tirerait de là, supposons que l'on fasse coïncider le point M avec le point C, ce qui donne $u = 0$, et qu'en outre ω soit constant, d'où P_n, Q_n indépendants de t. L'équation (86) se réduira à

$$j_{n+1}e^{\overline{j_{n+1}X}i} = -P_n w^{(n)} e^{(\psi_n - Q_n)i}.$$

De là

$$J_{n+1} = P_n w^{(n)}, \quad \overline{J_{n+1}X} = \psi_n - Q_n + \pi,$$

ou, d'après les formules (82) et en diminuant n d'une unité,

$$(87) \quad . \; . \; . \; J_n = \omega^n w^{(n-1)}, \quad \overline{J_n X} = \psi_{n-1} - \frac{n-2}{2}\pi.$$

Nous avons ainsi ce théorème : *Lorsque la vitesse angulaire* ω *est supposée constante, l'accélération d'ordre* n *du centre instantané* C, *entraîné par la figure mobile, est égale à la vitesse de déplacement du centre instantané* C_{n-1}, *multipliée par* ω^n, *et sa direction s'obtient en faisant tourner celle de cette vitesse de* n — 2 *angles droits autour du point* C, *dans le sens de la rotation* ω.

Il est facile de vérifier ce théorème pour le cas où $n = 1$.

55. Si maintenant nous faisons coïncider le point M avec le centre instantané C_{n+1}, dans l'équation (86), ce qui rend nul le premier membre et donne

$$u = \delta_{n+1}, \quad \theta = \overline{\delta_{n+1} X},$$

nous en déduisons

$$P_{n+1}\delta_{n+1}e^{(\overline{\delta_{n+1}X}-Q_{n+1})i} = \left(P_n e^{-Q_n i}\right)'\delta_n e^{\overline{\delta_n X}i} + P_n w^{(n)} e^{(\psi_n - Q_n)i},$$

et pour le cas où ω est constante,

$$P_{n+1}\delta_{n+1}e^{(\overline{\delta_{n+1}X}-Q_{n+1})i} = P_n w^{(n)} e^{(\psi_n - Q_n)i},$$

ou, en vertu des équations (82),

$$\delta_{n+1} = \frac{w^{(n)}}{\omega}, \quad \overline{\delta_{n+1}X} - \psi_n = \frac{\pi}{2}.$$

De là ce théorème :

Lorsque la vitesse angulaire ω *est constante, la droite qui joint le centre instantané de rotation* C *au centre instantané d'ordre* n + 1, C_{n+1}, *est le quotient de la vitesse de déplacement* $w^{(n)}$ *du centre instantané d'ordre* n, *par la vitesse angulaire, et sa direction s'obtient en faisant tourner celle de la vitesse* $w^{(n)}$ *d'un angle droit en sens contraire de la rotation* ω.

Ce qu'on peut exprimer plus brièvement en disant que *la vitesse d'entraînement du centre instantané d'ordre* n + 1 *est égale et parallèle à la vitesse de déplacement du centre instantané d'ordre* n, ce qui s'accorde d'ailleurs avec le théorème du n° 53.

§ 9. *Propriétés générales des accélérations d'ordre supérieur dans un solide qui a un point fixe.*

56. *Lemme.* Soient M et M' deux points mobiles quelconques, ρ et ρ' leurs rayons vecteurs tirés d'un point fixe O; ρ_1, ρ_2, ... ρ_n les rayons vecteurs des index successifs M_1, M_2, ... M_n du point M; ρ'_1, ρ'_2, ... ρ'_n ceux des index de M'. Si l'on représente en outre par x, y, z les coordonnées du point M, et par x', y' z' celles du point M', l'équation

$$\rho * \rho' = xx' + yy' + zz',$$

donne

$$\frac{d.\rho * \rho'}{dt} = x\frac{dx'}{dt} + y\frac{dy'}{dt} + z\frac{dz'}{dt} + x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt} + z'\frac{dz}{dt}.$$

ce qui équivaut à l'équation

$$\text{(A)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{d.\rho * \rho'}{dt} = \rho * \rho'_1 + \rho_1 * \rho'.$$

Ainsi, *la dérivée par rapport au temps du produit géométrique des rayons vecteurs de deux points est égale à la somme des produits géométriques du rayon vecteur de chaque point par le rayon vecteur de l'index de l'autre.*

Ce théorème conduit immédiatement à la dérivée d'ordre quelconque, car on en déduit

$$\frac{d^2.\rho * \rho'}{dt^2} = \rho * \rho'_2 + \rho_1 * \rho'_1 + \rho_1 * \rho'_1 + \rho_2 * \rho' = \rho * \rho'_2 + 2\rho_1 * \rho'_1 + \rho_2 * \rho',$$

et en général, par une loi facile à saisir,

$$(87^{bis})\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n(\rho * \rho')}{dt^n} = \rho * \rho'_n + n\rho_1 * \rho'_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\rho_2 * \rho'_{n-2} + \cdots \\ + \frac{n}{1}\rho'_{n-1} * \rho'_1 + \rho_n * \rho'. \end{aligned} \right.$$

Cette équation va nous conduire à une série de propriétés des accélérations d'ordres supérieurs.

57. Considérons d'abord un solide fixé par un point O; soient $\omega, \lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ l'axe instantané de rotation et les accélérations angulaires de divers ordres du solide; v la vitesse; $j, j_2, \ldots, j_n$ les accélérations du premier, du deuxième,..., du $n^{ième}$ ordre d'un point quelconque M du solide. La vitesse v faisant un angle droit avec l'axe instantané ω, on a constamment la relation

$$\omega * v = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^n(\omega * v)}{dt^n} = 0.$$

Or, si dans la formule (87), nous identifions le rayon ρ avec l'axe instantané ω, on sait que $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ coïncident respectivement avec les accélérations angulaires $\lambda, \lambda_2, \ldots \lambda_n$; d'autre part, prenons pour le point M' l'index M_1 du point M; nous aurons

$$\rho' = v, \quad \rho'_1 = j, \quad \rho'_2 = j_2, \ \ldots \ \rho'_n = j_n,$$

et l'équation (87) nous donnera *la relation générale*

$$(88)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega * j_n + n\lambda * j_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda_2 * j_{n-2} + \cdots + n\lambda_{n-1} * j \\ + \lambda_n * v = 0, \end{aligned} \right.$$

qui a lieu, pour un point quelconque du solide, entre les accélérations d'ordres successifs de ce point et les accélérations angulaires de différents ordres du solide.

Si, dans cette équation, nous posons $n = 1$, elle se réduit à

$$\omega * j + \lambda * v = 0,$$

ce qui nous ramène à l'équation (10) du n° 6. Pour $n = 2$, on a

$$\omega * j_2 + 2\lambda * j + \lambda_2 * v = 0,$$

et ainsi de suite. On donnerait à ces formules une expression plus élégante en désignant ω par λ_0, λ par λ_1, v par j_0 et j par j_1.

58. Si l'on part de même de l'équation

$$\rho * v = 0,$$

qui résulte de ce que la vitesse d'un point du solide est normale au rayon vecteur de ce point, et si, dans l'équation (87), on prend pour point M le point du solide, pour M' l'index M_1 du point M, on aura

$$\rho = \rho, \quad \rho_1 = v, \quad \rho_2 = j, \quad \dots \quad \rho_n = j_{n-1},$$
$$\rho' = v, \quad \rho'_1 = j, \quad \rho'_2 = j_2, \quad \dots \quad \rho'_n = j_n, \quad \frac{d^n.\rho * v}{dt^n} = 0,$$

et l'équation (87) donnera

$$\rho * j_n + nv * j_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} j * j_{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{1.2} j_{n-3} * j_2$$
$$+ \frac{n}{1} j_{n-2} * j + j_{n-1} * v = 0.$$

Comme il y a des termes répétés deux fois, on les réunira, et en ayant égard à la propriété connue des coefficients du binôme, on trouvera

$$(89) \qquad \rho * j_n + (n+1) v * j_{n-1} + \frac{(n+1)n}{1.2} j * j_{n-2} + \dots = 0,$$

la suite se terminant, dans le premier membre, au terme dans lequel les indices des j sont égaux si n est impair, et dans ce cas il faut prendre seulement la moitié du dernier terme; si n est pair, on s'arrêtera au terme après lequel les mêmes produits reparaîtraient. L'équation précédente est une relation qui a lieu entre le rayon vecteur, la vitesse et les accélérations de divers

ordres d'un point quelconque, dans un solide qui se meut autour d'un point fixe. Elle donne, par exemple, pour $n = 1$,

$$\rho * j + v^2 = 0,$$

propriété démontrée au n° 8; pour $n = 2$,

$$\rho * j_2 + 3v * \ = 0;$$

pour $n = 3$,

$$\rho * j_3 + 4v * j_2 + 3j^2 = 0,$$

et ainsi de suite.

De l'équation relative à $n = 2$, on déduit, en multipliant par m et faisant la somme pour tous les points,

$$\Sigma \rho * mj + 3\Sigma mv * j = 0.$$

Mais on a vu (n° 7) que $\Sigma mv * j$ est égal à $\omega * G$, donc

$$\Sigma \rho * mj_2 = -3\omega * G,$$

donc, *si l'on fait pour tous les points du solide en mouvement, à un instant quelconque, la somme des produits géométriques de leurs rayons vecteurs par leurs forces d'inertie du second ordre, cette somme est égale au triple produit géométrique de l'axe instantané de rotation par l'axe du couple moteur.*

On appelle ici *force d'inertie du second ordre* d'un point, le produit de sa masse par sa suraccélération j_2, prise en sens contraire.

59. Identifions encore, dans l'équation (87), le point M avec un point quelconque du solide ; M' avec le pôle I de la rotation instantanée; d'où

$$\rho = \rho, \quad \rho_1 = v, \quad \rho_2 = j, \ \ldots; \qquad \rho' = \omega, \quad \rho'_1 = \lambda, \quad \rho'_2 = \lambda_2, \ \ldots,$$

et nous aurons

$$(90) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n . \omega * \rho}{dt^n} &= \omega * j_{n-1} + \frac{n}{1} \lambda * j_{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} \lambda_2 * j_{n-3} + \cdots \\ &\quad + n\lambda_{n-1} * v + \lambda_n * \rho. \end{aligned} \right.$$

On peut aussi mettre cette équation sous une autre forme, en observant que

$$\frac{d.\omega * \rho}{dt} = \omega * v + \lambda * \rho = \lambda * \rho,$$

puisque le premier terme est nul. On a donc

$$\frac{d^n.\omega * \rho}{dt^n} = \frac{d^{n-1}.\lambda * \rho}{dt^{n-1}},$$

et en vertu de l'équation (87), où l'on remplacera ρ par λ, ρ_1 par ρ, n par $n-1$,

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n.\omega * \rho}{dt^n} = \lambda_n * \rho + (n-1)\,\lambda_{n-1} * v + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\,\lambda_{n-2} * j + \cdots \\ + \frac{n-1}{1}\,\lambda_2 * j_{n-3} + \lambda * j_{n-2}. \end{aligned} \right.$$

60. Nous pouvons généraliser quelques-uns des résultats précédents. Supposons qu'il s'agisse de deux points mobiles quelconques A et B, non dépendants d'un même solide, et dans l'équation (87), prenons pour le point M l'index d'ordre p du premier, pour M' l'index d'ordre q du second. Il en résultera

$$\rho = j_p, \quad \rho_1 = j_{p+1}, \quad \cdots \quad \rho_n = j_{p+n},$$
$$\rho' = j'_q, \quad \rho'_1 = j'_{q+1}, \quad \cdots \quad \rho'_n = j'_{q+n},$$

d'où la formule

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^n(j_p * j'_q)}{dt^n} = j_p * j'_{q+n} + \frac{n}{1} j_{p+1} * j'_{q+n-1} + \frac{n(n-1)}{1\ 2} j_{p+2} * j'_{q+n-2} + \cdots \\ + \frac{n}{1} j_{p+n-1} * j'_{q+1} + j_{p+n} * j'_q. \end{aligned} \right.$$

Si les points A et B se confondent, il en est de même de leurs accélérations d'un même ordre quelconque; si nous prenons en outre $p = q$, nous aurons cette relation particulière entre les

accélérations successives d'un même point mobile, en observant qu'ici $j_p \ast j_p = j_p^2$, car le produit géométrique se confond avec le simple produit,

$$\frac{d^n . j_p^2}{dt^n} = j_p \ast j_{p+n} + \frac{n}{1} j_{p+1} \ast j_{p+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} j_{p+2} \ast j_{p+n-2} + \cdots$$
$$+ n\, j_{p+n-1} \ast j_{p+1} + j_{p+n} \ast j_p .$$

Chaque terme est répété deux fois, sauf le terme du milieu si n est pair; dans ce cas, il faudra prendre seulement la moitié du dernier terme dans l'équation suivante :

$$(93) \quad \frac{1}{2} \frac{d^n . j_p^2}{dt^n} = j_p \ast j_{p+n} + \frac{n}{1} j_{p+1} \ast j_{p+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} j_{p+2} \ast j_{p+n-2} + \cdots,$$

où le second membre s'arrête au terme de rang $\frac{n}{2} + 1$ si n est pair, de rang $\frac{n+1}{2}$ si n est impair.

On peut particulariser p ou n. Ainsi, pour $p = 0$, $j_0 = v$, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d^n . v^2}{dt^n} = v \ast j_n + nj \ast j_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} j_2 \ast j_{n-2} + \cdots,$$

et en faisant $n = 2$,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 v^2}{dt^2} = v \ast j_2 + j^2.$$

Faisons maintenant $p = -1$, $j_{-1} = \rho$, $j_0 = v$, $j_1 = j$, etc., et l'équation (93) nous donnera

$$(94) \quad \frac{1}{2} \frac{d^n . \rho^2}{dt^n} = \rho \ast j_{n-1} + \frac{n}{1} v \ast j_{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2} j \ast j_{n-3} + \cdots,$$

le nombre des termes à prendre étant donné comme pour l'équation (93). Si, dans cette équation, nous faisons $n = 2$, nous aurons

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 . \rho^2}{dt^2} = \rho \ast j + v^2;$$

ce cas très particulier renferme le théorème de Yvon Villarceau (*).

Nous pouvons prendre, pour le point A, le pôle I de la rotation instantanée d'un solide qui a un point fixe O. L'équation (94) conduit à celle-ci

$$\frac{1}{2}\frac{d^n.\omega^2}{dt^n} = \omega * \lambda_n + \frac{n}{1}\lambda * \lambda_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\lambda_2 * \lambda_{n-2} + \cdots,$$

et, comme cas particulier, à

$$\frac{1}{2}\frac{d^2.\omega^2}{dt^2} = \omega * \lambda_2 + \lambda^2.$$

61. L'équation (A) du n° 56 conduit encore à d'autres conséquences intéressantes. Considérons, d'une part, un système matériel Σ quelconque, et soient OR = R, OS = S respectivement la résultante des forces motrices et celle des quantités de mouvement, rapportées à l'origine fixe O (voir au n° 6). On sait, par un théorème de dynamique, que R est l'index du point S. D'autre part, considérons un système invariable indépendant, mobile autour du point O; soient OI, OL l'axe instantané et l'accélération angulaire de ce système. Nous pouvons, dans l'équation (A), poser

$$\rho = \omega, \quad \rho_1 = \lambda; \qquad \rho' = S, \quad \rho'_1 = R,$$

et elle deviendra

$$(95) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \omega * R + \lambda * S = \frac{d.\omega * S}{dt}.$$

Si nous supposons que le système Σ soit un solide, et que ω et λ se rapportent à ce système Σ lui-même, nous aurons, en désignant par S_1 la résultante des quantités de mouvement dues à la translation, par S_2 celle qui est due à la rotation du solide

(*) Résal, *Traité de mécanique générale*, t. I, p. 253.

autour d'un de ses points A arbitrairement choisi, par V la vitesse de ce point,

$$\omega * S = \omega * S_1 + \omega * S_2 = M\omega * V,$$

car S_2 est, comme on le voit sans peine, normale à ω (*). On a donc

$$(96) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \omega * R + \lambda * S = M\frac{d.\omega * V}{dt},$$

V désignant la vitesse d'un point A choisi comme on veut dans le solide. Si, en particulier, nous prenons le point A sur l'axe de Mozzi, V se réduira à Q et sa direction sera celle de ω, donc

$$\omega * R + \lambda * S = M\frac{d.\omega Q}{dt},$$

ce qui nous ramène à l'équation (41) du n° 30. L'équation (96) est donc plus générale. Si O est un point fixe, on retrouve le théorème du n° 6.

62. Si, dans cette même équation (A), on posait $\rho = \lambda$, et par suite $\rho_1 = \lambda_2$, on aurait

$$\lambda * R + \lambda_2 * S = \frac{d.\lambda * S}{dt}.$$

Supposons toujours un solide mobile autour d'un point fixe O; la résultante S des quantités de mouvement, dues à la rotation autour du point O, se confond en grandeur et en direction avec la quantité de mouvement MV du centre de gravité, où toute la masse serait réunie; elle est perpendiculaire à ω, et comme on a

$$\lambda * S = \lambda \quad * S + \lambda_N * S,$$

(*) Un calcul connu montre que S_2 se confond avec la quantité de mouvement du centre de gravité où toute la masse serait réunie.

le premier terme est nul, le second égal à $M\lambda_n * V$, donc

$$\lambda * R_1 + \lambda_2 * S = M \frac{d.\lambda_n * V}{dt}.$$

Mais nous pouvons encore remplacer λ_n par sa valeur $\omega \frac{d\psi}{dt} = \omega\psi'$ (n° 1), et V par l'expression $-\omega y_1$, qui représente la composante parallèle à λ_n de la vitesse du centre de gravité dans la rotation autour de OI, y_1 étant la distance de ce centre de gravité au plan principal IOL. Donc

$$(97) \quad \ldots \quad \lambda * R + \lambda_2 * S = -M \frac{d.\omega^2\psi' y_1}{dt}.$$

Cette équation remarquable nous donne, lorsque y_1 est constamment nul,

$$\lambda * R + \lambda_2 * S = 0,$$

c'est-à-dire que, *si un solide se meut autour d'un point fixe de telle manière que le centre de gravité reste constamment dans le plan principal, la somme des produits géométriques de l'accélération angulaire du premier ordre par la résultante des forces extérieures (y compris la réaction du point fixe) et de l'accélération angulaire du second ordre par la résultante des quantités de mouvement, sera nulle constamment.*

63. Enfin, nous considérons encore, dans l'équation (A), le cas où ρ et ρ_1 conservant la même signification qu'au n° 61, ρ' et ρ'_1 désignent respectivement l'axe d'impulsion OK et l'axe OG du couple résultant des forces extérieures, relatifs au point O, pour un système matériel quelconque (*). Nous aurons donc

$$(98) \quad \ldots \quad \varphi * G + \lambda * K = \frac{d.\omega * K}{dt}.$$

(*) On sait, en effet, que G est l'index du point K. (Voir notre *Cours de mécanique*, n° 170.)

Pour éviter de trop nous étendre, nous nous bornerons à considérer ici le cas où Σ est un solide mobile et où ω, λ se rapportent au mouvement de ce solide lui-même. Dans ce cas, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point quelconque de ce solide, par rapport à trois axes rectangulaires fixes passant par O, on aura

$$\begin{aligned} \omega * \mathrm{K} &= p\Sigma m\,(y v_z - z v_y) + q\Sigma m\,(z v_x - x v_z) + r\Sigma m\,(x v_y - y v_x) \\ &= \Sigma m\left[v_x(qz - ry) + vy\,(rx - pz) + vz\,(py - qx)\right]. \end{aligned}$$

Mais, si υ désigne la vitesse totale du point du solide qui coïncide à l'instant t avec le point O, on a

$$v_x = \upsilon_x + qz - ry, \quad v_y = \upsilon_y + rx - pz, \quad v_z = \upsilon_z + py - qx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \omega * \mathrm{K} &= \Sigma m\left[v_x(v_x - \upsilon_x) + v_y(v_y - \upsilon_y) + v_z(v_z - \upsilon_z)\right] \\ &= \Sigma m v^2 - \upsilon_x \Sigma m v_x - \upsilon_y \Sigma m v_y - \upsilon_z \Sigma m v_z, \end{aligned}$$

ou enfin

$$\omega * \mathrm{K} = \Sigma m v^2 - \mathrm{M}.\upsilon * \mathrm{V},$$

V étant toujours la vitesse du centre de gravité du corps. Substituant cette valeur dans l'équation (98), nous aurons ce théorème général :

$$\omega * \mathrm{G} + \lambda * \mathrm{K} = \frac{d}{dt}\Sigma m v^2 - \mathrm{M}\frac{d.\upsilon * \mathrm{V}}{dt}.$$

Dans le cas particulier où le solide a un point fixe O, la vitesse υ est constamment nulle, et l'équation se réduit à la forme simple

$$(99) \quad \ldots\ldots \quad \omega * \mathrm{G} + \lambda * \mathrm{K} = \frac{d.\Sigma m v^2}{dt}.$$

Ainsi, *dans le mouvement quelconque d'un solide autour d'un point fixe* O, *la somme des produits géométriques de l'axe instantané par l'axe du couple moteur relatif au point* O, *et de l'accélération angulaire par l'axe d'impulsion relatif au même point,*

est égale à la dérivée de la force vive du corps par rapport au temps.

Mais nous avons démontré, au n° 7, l'équation

(12) . . . . $\omega_* G = \lambda_* K$,

qui, combinée avec la relation (99), nous donnera ces deux équations remarquables :

$$\omega_* G = \frac{1}{2} \frac{d.\Sigma mv^2}{dt},$$

$$\lambda_* K = \frac{1}{2} \frac{d.\Sigma mv^2}{dt},$$

Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, le produit géométrique de l'axe instantané de rotation par l'axe du couple moteur est égal à la dérivée de la demi-force vive totale du solide, par rapport au temps, et il en est de même du produit géométrique de l'accélération angulaire par l'axe d'impulsion.

Dans ce même cas, on démontrerait facilement l'équation

$$\lambda_* G + \lambda_2 {}_* K = \frac{1}{2} \frac{d^2.\Sigma mv^2}{dt^2},$$

et une série d'autres semblables.

§ 10. *Accélérations de divers ordres des points d'un solide fixé par un point.*

64. Supposons toujours un solide mobile autour d'un point fixe O, et dont les points sont rapportés à trois axes rectangulaires *fixes* OX, OY, OZ partant de ce point. En conservant les mêmes notations, la vitesse d'un point quelconque parallèlement à OX est donnée par l'équation

(α) . . . . $v_x = qz - ry$.

Prenant les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ des deux membres par rapport au

temps, et ayant égard aux expressions des composantes des accélérations de divers ordres et des accélérations angulaires de divers ordres, *lorsque les axes coordonnés sont fixes*, on aura immédiatement par la formule de Leibnitz,

$$(100)\ \left\{\begin{aligned} j_{nx} &= (\lambda_{ny} z - \lambda_{nz} y) + \frac{n}{1}(\lambda_{n-1,y} v_z - \lambda_{n-1,z} v_y) + \frac{n(n-1)}{1.2}(\lambda_{n-2,y} j_z - \lambda_{n-2,z} j_y) + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}(\lambda_{2y} j_{n-3,z} - \lambda_{2z} j_{n-3,y}) + \frac{n}{1}(\lambda_y j_{n-2,z} - \lambda_z j_{n-2,y}) + (q j_{n-1,z} - r j_{n-1,y}). \end{aligned}\right.$$

On aurait deux autres équations semblables pour j_{ny}, j_{nz}, et quoique ces formules soient obtenues en supposant les axes *fixes*, on voit immédiatement qu'elles subsisteront pour les projections de j_n sur des axes rectangulaires quelconques; par exemple, sur des axes mobiles avec le solide. Seulement, si les axes sont mobiles, les composantes des accélérations angulaires ne s'exprimeront plus aussi simplement, et les composantes des accélérations j ne s'exprimeront plus par les simples dérivées des coordonnées x, y, z.

65. Pour renfermer ces formules dans une expression symbolique très simple, nous remarquons que, en vertu même de l'équation (α), une expression telle que

$$\lambda_{iy} j_{kz} - \lambda_{iz} j_{ky},$$

représente la composante, parallèle à OX, de la vitesse du point qui avait pour coordonnées j_{kx}, j_{ky}, j_{kz}, dans une rotation dont l'axe représentatif aurait pour composantes parallèles aux axes $\lambda_{ix}, \lambda_{iy}, \lambda_{iz}$. Représentons la vitesse d'un point P dans cette rotation par le symbole V_i placé devant le point P, ou par V_iP. D'autre part, désignons par M_0, M_1, M_2, ... M_n le point (x, y, z) du solide et ses *index* du premier, du deuxième, ... du $n^{\text{ième}}$ ordre, en sorte que M_1 a pour coordonnées v_x, v_y, v_z; M_2 a pour coordonnées j_x, j_y, j_z, etc. ... De ces conventions résulte évidemment l'égalité

$$V_{ix} M_{k+1} = \lambda_{iy} j_{kz} - \lambda_{iz} j_{ky},$$

et l'équation (100) prend la forme

$$(100') \quad \begin{cases} j_{nx} = V_{nx}M_0 + \frac{n}{1} V_{n-1,x}M_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} V_{n-2,x}M_2 + \cdots \\ \quad + \frac{n(n-1)}{1.2} V_{2x}M_{n-2} + \frac{n}{1} V_{1x}M_{n-1} + V_{0x}M_n \ (*). \end{cases}$$

On obtiendra évidemment pour j_{ny}, j_{nz} deux expressions tout à fait semblables, où x serait simplement remplacé par y et z respectivement. De là nous concluons immédiatement que *l'accélération* j_n du point M_0 *du solide est la résultante : 1° d'une composante ou vitesse* V_nM_0; 2° *de* n *vitesses égales à* $V_{n-1}M_1$; 3° *de* $\frac{n(n-1)}{1.2}$ *vitesses égales à* $V_{n-2}M_2$; *etc.* ..., vitesses définies plus haut. L'accélération d'ordre n se déduira donc, en grandeur et en direction, des accélérations d'ordres inférieurs du même point. Nous écrirons ce résultat ainsi qu'il suit, au moyen de la notation commode des *équipollences* ou sommes géométriques de Bellavitis :

$$(101) \quad \begin{cases} j_n \triangleq V_nM_0 + \frac{n}{1} V_{n-1}M_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} V_{n-2}M_2 + \cdots \\ \quad + \frac{n}{1} V_1M_{n-1} + V_0M_n. \end{cases}$$

Ou, symboliquement, sous la forme plus simple encore :

$$(102) \quad \ldots\ldots \quad j_n \triangleq (V + M)^n,$$

dont la signification est celle-ci : on développera le second membre par la formule du binôme, comme si V, M étaient des quantités, en remplaçant les exposants par des indices, et introduisant les facteurs V_0, M_0 dans les termes où V, M entrent à la puissance zéro. On aura ainsi l'équation (101), que l'on interprétera dans le sens convenu par les symboles V_iM_k, et qui

(*) Il va de soi que, pour la symétrie, nous identifions λ_0 avec ω, et que V_0 désigne une simple vitesse due à la rotation autour de l'axe instantané.

conduira à la construction énoncée plus haut. Ou bien, analytiquement, on déduira immédiatement de la formule (101) les composantes j_{nx}, j_{ny}, j_{nz} sous la forme (100′), et au moyen de la relation (α), sous la forme (100), en fonction des composantes des accélérations d'ordre inférieur et des accélérations angulaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_n$.

66. La formule (102) est d'un usage très commode, mais elle exige cependant que l'on connaisse les accélérations $j_0, j_1, j_2, \ldots j_{n-1}$ pour calculer j_n : il faudra une élimination de proche en proche pour obtenir j_n en fonction des seules coordonnées x, y, z. Faisons l'application à l'accélération du second ordre ou *suraccélération* j_2. De l'équation

$$j_2 \doteq (V + M)^2 = V_2M_0 + 2V_1M_1 + V_0M_2,$$

nous déduisons immédiatement

$$j_{2x} = V_{2x}M_0 + 2V_{1x}M_1 + V_{0x}M_2,$$

ou

$$j_{2x} = (\lambda_{2y}z - \lambda_{2z}y) + 2(\lambda'_y v_z - \lambda_z v_y) + (qj_z - rj_y),$$

et l'on aura deux autres équations semblables pour j_{2y}, j_{2z}. Ces équations conduisent facilement à diverses propriétés que nous avons déjà signalées aux n°s 57 et 58,

$$\omega * j_2 + 2\lambda * j + \lambda_2 * v = 0, \quad \rho * j_2 + 3v * j = 0, \quad \text{etc.}$$

Mais nous allons éliminer les v et les j. On a d'abord

$$\lambda_y v_z - \lambda_z v_y = \lambda_y (py - qx) - \lambda_z (rx - pz) = p \,.\, \lambda * \rho - x \,.\, \omega * \lambda.$$

Ensuite, en substituant les valeurs connues de j_y, j_z et réduisant, on trouve facilement

$$qj_z - rj_y = \lambda_x \,.\, \omega * \rho - x \,.\, \omega * \lambda - \omega^2 v_x.$$

Substituant dans la valeur de j_{2x} et observant que l'on a

$$\omega * \lambda = \omega \lambda_\omega = \omega\omega',$$

puis opérant de la même manière pour j_{2y}, j_{2z} ou employant simplement la permutation circulaire, on trouve

$$
(103)\quad \left\{
\begin{aligned}
j_{2x} &= \lambda_{2y} z - \lambda_{2z} y + \lambda_x . \omega * \rho + 2p . \lambda * \rho - 3\omega\omega' x - \omega^2 v_x, \\
j_{2y} &= \lambda_{2z} x - \lambda_{2x} z + \lambda_y . \omega * \rho + 2q . \lambda * \rho - 3\omega\omega' y - \omega^2 v_y, \\
j_{2z} &= \lambda_{2x} y - \lambda_{2y} x + \lambda_z . \omega * \rho + 2r . \lambda * \rho - 3\omega\omega' z - \omega^2 v_z.
\end{aligned}
\right.
$$

On reconnait sans peine, dans les termes du second membre, les composantes parallèles à OX, OY, OZ de diverses accélérations faciles à définir, et l'on peut énoncer ce théorème :

Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, la suraccélération d'un point quelconque M *est la résultante de cinq accélérations : 1° une accélération* Ma *ayant même valeur et même direction que la vitesse du point* M *dans une rotation dont l'axe se confondrait avec la suraccélération angulaire* $\lambda_2 = OL_2$; *2° une accélération* Mb *parallèle à l'accélération angulaire* $\lambda = OL$, *et égale à* $\omega\lambda\rho \cos \overline{\omega\rho}$; *3° une accélération* Mc *parallèle à l'axe instantané* OI *et égale à* $2\omega\lambda\rho \cos \overline{\lambda\rho}$; *4° une accélération* Md *dirigée vers le point fixe et égale à* $3\omega\lambda\rho \cos \overline{\omega\lambda}$; *5° une accélération* Me *directement opposée à la vitesse du point* M *et égale à* $\omega^2 v$ *ou* $\omega^3\rho \sin \overline{\omega\rho}$.

67. Les équations (103) prennent une forme plus simple, si l'on rapporte le système aux *directions principales* définies au n° **11**, ce qui donne

$$
p = q = 0, \quad r = \omega; \qquad \lambda_x = \lambda_N = \omega\psi', \quad \lambda_y = 0, \quad \lambda_z = \lambda_\omega = \omega';
$$
$$
v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0; \qquad \omega * \rho = \omega z,
$$
$$
\lambda * \rho = x\lambda_x + y\lambda_y + z\lambda_z = \omega\psi' x + \omega' z.
$$

Substituant dans les formules (103), réduisant, on a

$$
(104)\quad \left\{
\begin{aligned}
j_{2x} &= -3\omega\omega' x + (\omega^3 - \lambda_{2z}) y + (\omega^2\psi' + \lambda_{2y}) z, \\
j_{2y} &= -(\omega^3 - \lambda_{2z}) x - 3\omega\omega' y - \lambda_{2x} z, \\
j_{2z} &= (2\omega^2\psi' - \lambda_{2y}) x + \lambda_{2x} y.
\end{aligned}
\right.
$$

La dernière équation ne renfermant pas z, nous montre que

tous les points du solide situés sur une même parallèle à l'axe instantané ont des suraccélérations égales en projection sur cet axe, et que *tous les points situés sur l'axe instantané ont leurs suraccélérations normales à cet axe.*

68. Les équations (104) conduisent aux expressions des composantes $j_{2\omega}$, j_{2v}, j_{2u} de la suraccélération d'un point du solide, parallèlement à l'axe instantané à la vitesse du point et au rayon de rotation u (n° 18).

1° La troisième équation (104) donne immédiatement

$$j_{2\omega} = 2\omega\psi' x + \lambda_{2x} y - \lambda_{2y} x.$$

Mais les composantes de la vitesse étant $-\omega y$, ωx, 0, on a

$$\lambda_{2x} y - \lambda_{2y} x = -\frac{\lambda_2 * v}{\omega} = -\lambda_2 u \cos \lambda_2 v.$$

Remplaçant en outre x par sa valeur $u \cos \varphi$, on a cette expression très simple de la composante de la suraccélération parallèle à l'axe instantané :

$$(105) \quad \ldots\ldots \quad j_{2\omega} = u\,(2\omega\psi' \cos\varphi - \lambda_{2v}),$$

λ_{2v} étant la projection de la suraccélération angulaire sur la vitesse du point considéré.

2° De l'équation

$$\begin{aligned} j_2 * v &= \omega\,(x j_{2y} - y j_{2x}) \\ &= \omega\left[(\lambda_{2z} - \omega^3)(x^2 + y^2) - (\omega^2\psi' + \lambda_{2y})\,yz - \lambda_{2x} xz\right], \end{aligned}$$

on déduit, en observant que

$$\lambda_{2z}(x^2 + y^2) - \lambda_{2x} xz - \lambda_{2y} yz = \lambda_{2z}\rho^2 - z\,.\,\lambda_2 * \rho,$$

l'équation

$$j_2 * v = \omega\,(\lambda_{2z}\rho^2 - z\,.\,\lambda * \rho - \omega^3 u^2 - \omega^2\psi' yz).$$

On a d'ailleurs facilement

$$\lambda_{2z}\rho^2 - z\ \lambda * \rho = \lambda_2\rho^2 \sin\overline{\omega\rho}\sin\overline{\lambda_2\rho}\cos\overline{\omega\rho\lambda_2},$$

$$u = \rho\sin\overline{\omega\rho},\quad y = \rho\sin\overline{\omega\rho}\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\overline{\omega\rho},\quad v = \omega u,$$

d'où l'on tire

$$(106)\quad .\ .\ j_{2v} = \rho\left(\lambda_2\sin\overline{\lambda_2\rho}\cos\overline{\omega\rho\lambda_2} - \omega^3\sin\overline{\omega\rho} - \omega^2\psi'\cos\overline{\omega\rho}\sin\varphi\right),$$

pour la *composante tangentielle* de la suraccélération du point mobile M. On peut remarquer que *le premier terme représente la projection, sur le plan passant par le point* M *et l'axe* OI, *du parallélogramme construit sur le rayon vecteur et sur la suraccélération angulaire.*

3° Enfin, on a de même, la direction du rayon *u étant prise de* M *vers l'axe instantané,*

$$j_2 * u = -(xj_{2x} + yj_{2y}) = 3\omega\omega' u^2 + \lambda_{2x} yz - (\omega^2\psi' + \lambda_{2y})xz.$$

Remplaçons encore

$$\lambda_{2x}y - \lambda_{2y}x \qquad \text{par} \qquad -\lambda_2 u\cos\overline{\lambda_2 v},$$

x par $u\cos\varphi$, y par $u\sin\varphi$, et divisons par u. Il vient

$$j_{2u} = 3\omega\omega' u - (\lambda_{2v} + \omega^2\psi'\cos\varphi)\,z,$$

ou, sous une forme équivalente,

$$(107)\quad .\ .\ j_{2u} = \rho\left[3\omega\omega'\sin\overline{\omega\rho} - (\lambda_{2v} + \omega^2\psi'\cos\varphi)\cos\overline{\omega\rho}\right].$$

69. Les formules (104) renferment les composantes, parallèles aux directions principales, de la suraccélération angulaire λ_2; en exprimant ces composantes en fonction de données résultant du mouvement de l'axe instantané, on donnerait aux formules (104) des formes variées.

Pour procéder rigoureusement, nous supposerons le mouvement rapporté à des axes rectangulaires *fixes* OX, OY, OZ; nous prendrons sur l'axe instantané mobile une longueur OI égale à

l'unité; le point I décrira, sur le cône fixe, lieu de l'axe instantané, une trajectoire orthogonale II'... des génératrices de ce cône, et nous appellerons μ la direction Iμ de la tangente à cette courbe, θ l'angle que fait la normale principale Iξ de cette courbe avec l'axe instantané. Si nous observons que la direction μ n'est autre que la direction principale ON du n° 11, nous aurons, d'après des formules connues,

$$\lambda_x = \lambda_\omega \cos \overline{\omega X} + \lambda_N \cos \overline{\mu X} = \omega' \cos \overline{\omega X} + \omega\psi' \cos \overline{\mu X}.$$

Comme cette équation subsiste à chaque instant, on peut la différentier par rapport au temps, et l'on a

$$\frac{d\lambda_x}{dt} = \lambda_{1x} = \omega'' \cos \overline{\omega X} + \frac{d.\omega\psi'}{dt} \cos \overline{\mu X} + \omega' \frac{d.\cos \overline{\omega X}}{dt} + \omega\psi' \frac{d.\cos \overline{\mu X}}{dt},$$

ω'' désignant la dérivée seconde de ω par rapport à t. Mais en projetant sur OX le contour triangulaire OII'O, on a

$$d.\cos \overline{\omega X} = \text{II}' \cos \overline{\text{II}'X},$$

ou, en observant que l'arc II' mesure l'angle $d\psi$ de deux génératrices infiniment voisines, que la direction II' se confond à la limite avec la direction Iμ de la tangente,

$$\frac{d.\cos \overline{\omega X}}{dt} = \psi' \cos \overline{\mu X}.$$

Projetons de même sur OX le contour formé par la tangente $\text{I}\mu = 1$, la parallèle $\text{I}\mu_1 = 1$ à la tangente infiniment voisine I'μ', et la droite $\mu\mu_1$. Si $d\varepsilon$ désigne l'angle de contingence de la trajectoire orthogonale des génératrices, on aura

$$d.\cos \overline{\mu X} = d\varepsilon \cos \overline{\xi X},$$

et en divisant par dt,

$$\frac{d.\cos\overline{\mu X}}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}\cos\overline{\xi X}.$$

Mais la transformée plane de la trajectoire orthogonale II′ est un arc de cercle dont le rayon est 1 et l'angle au centre $d\psi$; d'autre part, θ est évidemment l'angle que fait le plan osculateur de la courbe II_1 avec le plan tangent au cône, et, d'après un théorème connu sur l'angle de contingence géodésique d'une courbe, on a

$$d\psi = \cos\theta \; d\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\psi'}{\cos\theta}.$$

En substituant ces résultats dans l'expression de λ_{2x}, on aura donc

$$\lambda_{2x} = \omega''\cos\overline{\omega X} + \left(\frac{d.\omega\psi'}{dt} + \omega'\psi'\right)\cos\overline{\mu X} + \frac{\omega\psi'^2}{\cos\theta}\cos\overline{\xi X};$$

en développant un peu et opérant de même pour les autres composantes, on aura enfin

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_{2x} &= \omega''\cos\overline{\omega X} + (2\omega'\psi' + \omega\psi'')\cos\overline{\mu X} + \frac{\omega\psi'^2}{\cos\theta}\cos\overline{\xi X},\\ \lambda_{2y} &= \omega''\cos\overline{\omega Y} + (2\omega'\psi' + \omega\psi'')\cos\overline{\mu Y} + \frac{\omega\psi'^2}{\cos\theta}\cos\overline{\xi Y},\\ \lambda_{2z} &= \omega''\cos\overline{\omega Z} + (2\omega'\psi' + \omega\psi'')\cos\overline{\mu Z} + \frac{\omega\psi'^2}{\cos\theta}\cos\overline{\xi Z}.\end{aligned}\right.$$

On déduit immédiatement de là le théorème suivant :

La suraccélération angulaire λ_2 résulte : 1° *d'une composante* $\omega'' = \frac{d^2\omega}{dt^2}$ *dont la direction est celle de l'axe instantané de rotation;* 2° *d'une composante* $2\omega'\psi' + \omega\psi''$ *normale à l'axe instantané dans le plan principal;* 3° *d'une composante* $\frac{\omega\psi'^2}{\cos\theta}$ *dont la direction est parallèle à la normale principale de la trajectoire orthogonale des génératrices du cône fixe, lieu de l'axe instantané.*

70. Si l'on fait coïncider le système d'axes OXYZ avec le système des directions principales, on a

$$\cos \overline{\omega X} = \cos \overline{\omega Y} = 0, \quad \cos \overline{\omega Z} = 1\,; \quad \cos \overline{\mu X} = 1,$$
$$\cos \overline{\mu Y} = \cos \overline{\mu Z} = 0\,; \quad \cos \overline{\xi X} = 0, \quad \cos \overline{\xi Y} = \sin \theta,$$
$$\cos \overline{\xi Z} = -\cos \theta,$$

ce qui donne aux équations (108) la forme plus simple

$$(109) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \lambda_{2x} = 2\omega'\psi' + \omega\psi'', \\ \lambda_{2y} = \omega\psi'^2 \operatorname{tg} \theta, \\ \lambda_{2z} = \omega'' - \omega\psi'^2. \end{cases}$$

On pourra ensuite substituer ces valeurs dans les équations (104). Elles se simplifient lorsque l'on suppose ω indépendant du temps, comme on peut le faire dans les mouvements purement géométriques.

Nous ferons remarquer ici que l'étude des suraccélérations dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe a été faite d'abord par M. Resal (*Traité de cinématique pure*, pp. 315 et suiv.), mais principalement au point de vue des applications géométriques, et en supposant alors ω constant. M. Schell, dans sa *Theorie der Bewegung und Kräfte* (pp. 559 et suiv., 2e éd.), s'est aussi occupé de cette question, en se servant, comme M. Resal, de considérations géométriques. Il obtient *six* composantes pour l'accélération du second ordre d'un point quelconque du solide; elles sont moins simples que les miennes. Les formules qu'il en déduit (p. 563) pour les composantes parallèles aux directions principales ne sont pas d'accord avec mes formules (104); il y a $\omega\omega'$ au lieu de $3\omega\omega'$, et le terme $2\omega^2\psi'x$ manque dans l'expression de j_{2z}; cela tient à une inadvertance, commise au haut de la page 363, dans l'écriture des projections de sa cinquième composante ωn_α : il a ainsi dans ses formules $\omega\omega'x$, $\omega\omega'y$, $-\omega^2\psi'x$ au lieu de $-\omega\omega'x$, $-\omega\omega'y$, $+\omega^2\psi'x$, et de là la contradiction. Ce n'est pas tout : dans ces mêmes formules.

M. Schell a substitué les valeurs de λ_{2x}, λ_{2y}, λ_{2z}, données ici par les équations (109), et qu'il trouve égales respectivement à

$$(\omega\psi')', \quad \lambda \frac{di}{dt} \sin x, \quad \omega''.$$

Ce nouveau désaccord provient de ce que M. Schell, pour obtenir ces composantes, suppose d'abord les axes dirigés suivant les directions principales, et différentie *comme si ces axes étaient fixes*, ce qui n'est évidemment pas permis. Les valeurs de λ_{2x}, λ_{2y}, λ_{2z} sont donc données exactement par nos formules (109).

§ 11. *Accélérations et accélérations angulaires de divers ordres, dans les mouvements relatifs.*

70[bis]. Le problème de la composition des accélérations d'ordre quelconque, dans le mouvement relatif d'un point par rapport à un système de comparaison mobile d'une manière quelconque, a été traité de diverses manières par Somoff (*), par M. Maurice Lévy (**), par moi-même (***) et par M. Laisant (****). Il se résout d'une manière très simple et très pratique à l'aide des principes suivants.

Disons, pour abréger, que le point mobile M est le *résultant* de plusieurs autres, M', M'', ..., lorsque le rayon vecteur OM, mené d'une origine donnée O au point M, est la résultante des rayons vecteurs OM', OM'', ... Il est facile de voir que si cette relation subsiste à chaque instant, *l'index du point* M *sera le résultant des index des points* M', M'', ..., car l'équation

$$x = x' + x'' + \cdots,$$

(*) *Bulletins de l'Acad. des sciences de Saint-Pétersbourg*, 1865; *Theoretische Mechanik*, trad. par Ziwet, t. I, Cinématique, p. 392.

(**) *Comptes rendus de l'Acad. des sciences*, t. LXXXVI, 1878, p. 1068.

(***) *Ibid.*, p. 1390.

(****) *Comptes rendus*, etc., t. LXXXVII, 1878, p. 204.

entre les projections, sur un axe fixe, des rayons vecteurs OM, OM′, OM″, ..., donnera l'équation

$$v_x = v'_x + v''_x + \cdots,$$

entre les projections des vitesses des points M, M′, M″, ..., sur cet axe; donc v est la résultante de v', v'', ..., ce qui entraine la conséquence énoncée. Ce théorème s'étend, par des différentiations successives, aux accélérations de tout ordre, et par conséquent

Lorsqu'un point mobile M *est, à chaque instant, le résultant de plusieurs autres* M′, M″, ..., *son accélération d'ordre* n *est la résultante de leurs accélérations de même ordre, et son index d'ordre* n *est le résultant de leurs index de même ordre.*

71. Considérons un point M, mobile d'une manière quelconque, et un système de comparaison mobile $Oxyz$, *dont nous supposerons d'abord l'origine* O *fixe.* Nous désignons par les notations A_1M, A_2M, ... A_nM respectivement la vitesse *absolue* et les accélérations *absolues* du premier, ... du $n - 1$° ordre de M; par R_1M, R_2M, ... R_nM la vitesse *relative* et les accélérations *relatives* de M par rapport au système $Oxyz$; par E_1M, E_2M, ... E_nM sa vitesse et ses accélérations d'entrainement jusqu'à l'ordre $n - 1$.

Les mêmes symboles, placés devant la lettre qui désigne un point mobile, serviront à désigner ses *index* de divers ordres; ainsi A_2M représentera l'*index absolu* du deuxième ordre de M, c'est-à-dire l'index d'accélération absolue de ce point; R_3M sera l'index de suraccélération relative de ce point; etc....

Ces mêmes notations s'appliquerout aux index eux-mêmes; ainsi E_1R_2M désigne, soit la vitesse d'entrainement de l'index R_2M de l'accélération relative du point M, soit l'index de cette vitesse d'entrainement du point R_2M. De même, $R_1E_1R_1M$ désignerait la vitesse relative du point E_1R_1M, qui est l'index d'entraînement du point R_1M, lequel est lui-même l'index relatif du point M, et ainsi de suite.

Les composantes des vitesses ou accélérations parallèlement

aux axes mobiles Ox, Oy, Oz seront marquées toujours par les indices x, y, z. Ainsi $E_{1x}R_1M$ désigne la projection sur Ox de la vitesse d'entraînement de l'index relatif R_1M; $A_{2y}R_1E_2M$, la projection sur Oy de l'accélération absolue de l'index R_1E_2M, etc. ...

Enfin, on voit sans peine qu'il n'y a aucun inconvénient à supprimer, dans ces notations, la lettre M qui désigne le point mobile lui-même, en sorte que les notations A_1, E_1, R_1 isolément auront les mêmes significations que A_1M, E_1M, R_1M. Cela n'introduit aucune confusion et simplifie l'écriture.

72. Ces conventions admises, on sait que la vitesse absolue du point M est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement, ce qui s'écrira comme suit :

$$A_1M \doteq R_1M + E_1M,$$

ou, plus simplement, d'après la remarque qui vient d'être faite,

$$(110) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad A_1 \doteq R_1 + E_1.$$

Ainsi l'index A_1 est le résultant des index R_1 et E_1. Par définition, la vitesse absolue de l'index A_1 représente en grandeur et en direction l'accélération absolue du point M; on a donc, en appliquant au point A_1 la même relation (110),

$$A_2 = A_1A_1 \doteq R_1A_1 + E_1A_1.$$

Mais A_1 étant le résultant de R_1 et de E_1, la remarque du n° 70 nous donne

$$R_1A \doteq R_1R_1 \doteq R_1E_1 + R_1E_1, \quad E_1A_1 \doteq E_1R_1 + E_1E_1,$$

donc

$$A_2 \doteq R_1R_1 + R_1E_1 + E_1R_1 + E_1E_1,$$

ce qui peut s'écrire *symboliquement*

$$(111) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad A_2 \doteq (R_1 + E_1)(R_1 + E_1),$$

ou encore

$$A_2 \doteq (R_1 + E_1)^2,$$

en convenant de ne jamais changer l'ordre des facteurs dans les produits partiels.

La loi est générale, car on a, par définition et par (110),

$$A_n = A_1 A_{n-1} \triangleq R_1 A_{n-1} + E_1 A_{n-1},$$

ou, symboliquement,

$$A_n \triangleq (R_1 + E_1) A_{n-1},$$

et si l'on suppose que la loi soit vraie déjà pour A_{n-1}, il en résultera évidemment

$$(112) \quad \ldots\ldots \quad A_n \triangleq (R_1 + E_1)^n,$$

formule qui doit être entendue dans ce sens, que l'on développera le produit des n facteurs $(R_1 + E_1)$ du second membre sans jamais intervertir l'ordre des facteurs dans les produits partiels, et qu'on interprétera tous les termes du second membre conformément aux conventions du numéro précédent.

Ainsi comprise, cette équipollence très simple donnera immédiatement, pour l'accélération absolue d'ordre n, soit la construction géométrique de cette accélération en faisant intervenir seulement des vitesses relatives et des vitesses d'entrainement, soit les expressions analytiques des composantes de cette accélération parallèlement aux axes mobiles, comme nous allons le faire voir.

73. Rappelons que, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point mobile quelconque M, et α, β, γ les composantes de la rotation σ du système de comparaison par rapport aux axes mobiles, on a toujours, pour les composantes de la vitesse relative et de la vitesse d'entrainement de M,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} R_{1x} = \dfrac{dx}{dt}, \quad R_{1y} = \dfrac{dy}{dt}, \quad R_{1z} = \dfrac{dz}{dt}, \\ E_{1x} = \beta z - \gamma y, \quad E_{1y} = \gamma x - \alpha z, \quad E_{1z} = \alpha y - \beta x, \end{cases}$$

et que ces expressions s'appliqueront à un index quelconque en

substituant à x, y, z les coordonnées respectives de cet index par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. Ainsi les lettres $R_{1x},\ldots$ $E_{1x},\ldots$, placées devant un point ou un index quelconque, signifient des opérations parfaitement déterminées à effectuer sur les coordonnées de ce point ou de cet index.

Cela posé, considérons par exemple l'accélération du premier ordre. L'équation (111), développée, nous donne successivement

$$A_2 \doteq R_1R_1 + R_1E_1 + E_1R_1 + E_1E_1,$$
$$A_{2x} = R_{1x}R_1 + R_{1x}E_1 + E_{1x}R_1 + E_{1x}E_1.$$

Mais nous avons immédiatement, par les relations (α),

$$R_{1x}R_1 = \frac{dR_{1x}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad R_{1x}E_1 = \frac{dE_{1x}}{dt} = \frac{d(\beta z - \gamma y)}{dt},$$
$$E_{1x}R_1 = \beta R_{1z} - \gamma R_{1y} = \beta \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dy}{dt},$$
$$E_{1x}E_1 = \beta E_{1z} - \gamma E_{1y} = \beta(\alpha y - \beta x) - \gamma(\gamma x - \alpha z).$$

Donc

$$(113) \quad \ldots \left\{ \begin{aligned} A_{2x} &= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(\beta\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dy}{dt}\right) \\ &+ \left[\frac{d\beta}{dt}z - \frac{d\gamma}{dt}y + \beta(\alpha y - \beta x) - \gamma(\gamma x - \alpha z)\right]. \end{aligned} \right.$$

On a pour A_{2y}, A_{2z} deux expressions semblables, qui se déduisent de celle-ci par permutation circulaire. Ainsi les composantes de l'accélération absolue s'obtiennent, entièrement développées, en fonction de x, y, z, α, β, γ et de leurs dérivées par rapport à t.

74. Pour la suraccélération absolue, on obtiendra de même

$$A_3 \doteq (R_1 + E_1)^3 \doteq (R_1 + E_1)(R_1 + E_1)(R_1 + E_1),$$

et en développant le produit symbolique, puis projetant sur

l'axe des x,

$$A_{3x} = R_{1x}R_1R_1 + R_{1x}R_1E_1 + R_{1x}E_1R_1 + R_{1x}E_1E_1 + E_{1x}R_1R_1$$
$$+ E_{1x}R_1E_1 + E_{1x}E_1R_1 + E_{1x}E_1E_1.$$

Or, on a, par l'application répétée des formules (α),

$$R_{1x}R_1R_1 = \frac{dR_{1x}R_1}{dt} = \frac{d^2R_{1x}}{dt^2} = \frac{d^3x}{dt^3},$$

$$R_{1x}R_1E_1 = \frac{d^2E_{1x}}{dt^2} = \frac{d^2(\beta z - \gamma y)}{dt^2},$$

$$R_{1x}E_1R_1 = \frac{dE_{1x}R_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta R_{1z} - \gamma R_{1y}) = \frac{d}{dt}\left(\beta\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dy}{dt}\right),$$

$$R_{1x}E_1E_1 = \frac{dE_{1x}E_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta E_{1z} - \gamma E_{1y}) = \frac{d}{dt}\left[\beta(\alpha y - \beta x) - \gamma(\gamma x - \alpha z)\right],$$

$$E_{1x}R_1R_1 = \beta R_{1z}R_1 - \gamma R_{1y}R_1 = \beta\frac{d^2z}{dt^2} - \gamma\frac{d^2y}{dt^2},$$

$$E_{1x}R_1E_1 = \beta R_{1z}E_1 - \gamma R_{1y}E_1 = \beta\frac{d(\alpha y - \beta x)}{dt} - \gamma\frac{d(\gamma x - \alpha z)}{dt},$$

$$E_{1x}E_1R_1 = \beta E_{1z}R_1 - \gamma E_{1y}R_1 = \beta\left(\alpha\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dx}{dt}\right) - \gamma\left(\gamma\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dz}{dt}\right),$$

$$E_{1x}E_1E_1 = \beta E_{1z}E_1 - \gamma E_{1y}E_1 = \beta(\alpha E_{1y} - \beta E_{1x}) - \gamma(\gamma E_{1x} - \alpha E_{1z})$$
$$= \beta\left[\alpha(\gamma x - \alpha z) - \beta(\beta z - \gamma y)\right] - \gamma\left[\gamma(\beta z - \gamma y) - \alpha(\alpha y - \beta x)\right].$$

Substituons dans la valeur de A_{3x}, groupons les termes affectés des dérivées de même ordre de x, y, z (ou des accélérations relatives de même ordre) et observons que le dernier terme $E_{1x}\,E_1\,E_1$ se réduit, à cause des relations

$$\alpha(\beta z - \gamma y) + \beta(\gamma x - \alpha z) + \gamma(\alpha y - \beta x) = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \sigma^2,$$

à l'expression

$$-\sigma^2(\beta z - \gamma y),$$

et nous aurons enfin

$$(114)\quad \left\{\begin{aligned} A_{3x} = \frac{d^3x}{dt^3} &+ 3\left[\beta\frac{d^2z}{dt^2} - \gamma\frac{d^2y}{dt^2}\right] + 3\left[\frac{d\beta}{dt}\frac{dz}{dt} - \frac{d\gamma}{dt}\frac{dy}{dt}\right. \\ &\left. + \beta\left(\alpha\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dx}{dt}\right) - \gamma\left(\gamma\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dz}{dt}\right)\right] \\ &+ \left[\frac{d^2\beta}{dt^2}z - \frac{d^2\gamma}{dt^2}y + \frac{d\beta}{dt}(\alpha y - \beta x) - \frac{d\gamma}{dt}(\gamma x - \alpha z)\right. \\ &\left. + 2\beta\left(\frac{d\alpha}{dt}y - \frac{d\beta}{dt}x\right) - 2\gamma\left(\frac{d\gamma}{dt}x - \frac{d\alpha}{dt}z\right) - \sigma^2(\beta z - \gamma y)\right]. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs de A_{3y}, A_{3z} se déduisent de celle-là par permutation circulaire. On voit donc comment, d'une manière directe et par un système d'opérations toujours les mêmes, on peut former les composantes A_{nx}, A_{ny}, A_{nz} de l'accélération absolue d'ordre n, sans avoir besoin de passer par celles des accélérations d'ordre inférieur. De plus, ces composantes sont exprimées immédiatement en fonction des éléments essentiels de la question.

75. On retrouve sans peine, dans les formules (113) et (114), le théorème donné par Somoff et retrouvé par M. Maurice Lévy. En effet, dans le premier groupe du second membre de l'équation (113), on reconnait la projection sur Ox de l'accélération relative R_2; dans le deuxième, le double de la projection sur Ox de E_1R_1; quant au troisième groupe, comme il subsisterait seul si x, y, z étaient indépendants du temps, il ne peut être que la projection sur Ox de l'*accélération d'entrainement* E_2. Les projections de A_2 sur Oy, Oz donnant évidemment des résultats semblables, on en conclut

$$A_2 \triangleq R_2 + 2E_1R_1 + E_2,$$

comme le donne le théorème dont il s'agit.

De même, des quatre groupes du second membre de l'équation (114), le premier représente évidemment R_{3x}; le deuxième, d'après les formules (α), est exactement $3E_{1x}R_2$; le troisième, si nous le comparons au dernier groupe E_{2x} de l'équation (113),

n'en diffère que par la substitution des composantes $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ de R_1 à x, y, z; il peut donc s'écrire $3\,E_{1x}R_1$. Enfin, le dernier groupe représente A_{1x} dans l'hypothèse où x, y, z seraient invariables et le point M fixé au système $Oxyz$; donc il n'est autre que E_{3x}. Raisonnant de même sur A_{3y}, A_{3z}, on aura enfin

$$A_3 \stackrel{\frown}{=} R_3 + 3E_1R_2 + 3E_2R_1 + E_3,$$

ce qui est encore d'accord avec le théorème de Somoff : *La suraccélération absolue est la résultante : 1° de la suraccélération relative; 2° de la vitesse d'entraînement de l'index de l'accélération relative, prise trois fois; 3° de l'accélération d'entraînement de l'index relatif du premier ordre, prise aussi trois fois; 4° de la suraccélération d'entraînement.*

Mais on voit immédiatement la supériorité de la formule (112) sur le théorème de Somoff-Lévy. Non seulement elle donne la construction géométrique de l'accélération absolue A_n au moyen des simples *vitesses* de points ou d'index, mais *elle fournit*, par le développement analytique et *du même coup, les expressions des accélérations d'entraînement des divers ordres* E_2, E_3, ... projetées sur les axes mobiles. Or, dans le théorème de Somoff, ces accélérations d'entraînement figurent également, mais ce sont *des grandeurs absolument inconnues* sur lesquelles le théorème lui-même ne donne aucune lumière.

75. Il ne paraît pas facile d'arriver à une démonstration générale du théorème de Somoff en suivant la marche ci-dessus; mais on y parvient très simplement à l'aide d'un théorème qui ne manque pas d'intérêt par lui-même. Ce théorème peut s'établir par la cinématique; mais l'analyse la donne si simplement, que nous suivrons cette voie.

Soit M (x, y, z) un point mobile rapporté à un système de comparaison $Oxyz$ mobile lui-même autour d'un point fixe O. Projetons la vitesse d'entraînement E_1 sur un axe fixe quelconque AX. Les valeurs $E_{1x} = \beta z - \gamma y$, etc. ..., nous donneront évidemment un résultat de la forme

$$E_{1X} = Fx + Gy + Hz,$$

F, G, H, étant des expressions qui dépendent seulement du mouvement du système de comparaison et nullement des coordonnées x, y, z. Nous tirons de là

$$\frac{dE_{1x}}{dt} = \left(x\frac{dF}{dt} + y\frac{dG}{dt} + z\frac{dH}{dt}\right) + \left(F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt}\right).$$

Or, le premier membre représente la projection sur AX de la vitesse absolue du point E_1, donc $A_{1x}E_1$. Le premier groupe du second membre est la valeur de $A_{1x}E_1$ lorsque x, y, z ne dépendent pas du temps $\left(\frac{dx}{dt} = 0, ...\right)$, ce qui n'est autre chose que E_{2x} ; le second groupe, comparé à la valeur de E_{1x}, n'en diffère que par la substitution des dérivées de x, y, z à ces variables ; il représente donc $E_{1x}R_1$. En raisonnant de même sur deux autres axes AY, AZ, on a l'équipollence

(115) . . . . $A_1E_1 \doteq E_2 + E_1R_1$.

Cette relation s'étend sans difficulté à l'accélération d'entraînement d'ordre quelconque E_n, car on reconnaît immédiatement que les composantes E_{2x}, E_{3x}, ... sont de même forme linéaire $Fx + Gy + Hz$ que F_{1x}. On aura donc, par le même raisonnement,

(116) . . . . . . $A_1E_n \doteq E_{n+1} + E_nR_1$,

d'où ce théorème :

La vitesse absolue de l'index d'entraînement d'ordre n *d'un point mobile* M *est la résultante de l'accélération d'entraînement d'ordre* n *du point* M *et de l'accélération d'entraînement d'ordre* n — 1 *de l'index relatif du point* M.

76. Ce principe admis, appliquons à l'équation connue

(110) . . . . $A_1 \doteq R_1 + E_1$,

le principe du n° 70 et la relation (110) elle-même :

$$A_2 \doteq A_1R_1 + A_1E_1 \doteq R_1R_1 + E_1R_1 + A_1E_1,$$

d'où l'on tire, en observant que $R_1R_1 = R_2$ et appliquant l'équation (115),

$$A_2 \,\hat{=}\, R_2 + 2E_1R_1 + E_2.$$

De même, en vertu des mêmes formules,

$$A_3 \,\hat{=}\, A_1R_2 + 2A_1E_1R_1 + A_1E_2 \,\hat{=}\, R_1R_2 + E_1R_2 + 2E_2R_1 + 2E_1R_2 + E_3 + E_2R_1,$$

ou

$$A_3 \,\hat{=}\, R_3 + 3E_1R_2 + 3E_2R_1 + E_3.$$

En général, si la loi est reconnue vraie pour l'accélération d'ordre $n - 1$,

$$(117)\quad \left\{ \begin{aligned} A_n \,\hat{=}\, R_n &+ \frac{n}{1}E_1R_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}E_2R_{n-2} + \cdots \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}E_{n-2}R_2 + \frac{n}{1}E_{n-1}R_1 + E_n, \end{aligned} \right.$$

nous aurons, en appliquant le principe du n° 70, l'équation (110) et l'équation (115)

$$\begin{aligned} A_{n+1} = A_1A_n \,\hat{=}\, & A_1R_n + \frac{n}{1}A_1E_1R_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}A_1E_2R_{n-2} + \cdots A_1E_n \\ \hat{=}\, & R_1R_n + E_1R_n + \frac{n}{1}E_2R_{n-1} + \frac{n}{1}E_1R_n + \frac{n(n-1)}{1.1}E_3R_{n-2} \\ & + \frac{n(n-1)}{1.2}E_2R_{n-1} + \cdots + \frac{n(n-1)}{1.2}E_{n-1}R_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}E_{n-2}R_1 \\ & + \frac{n}{1}E_nR_1 + \frac{n}{1}E_{n-1}R_2 + E_{n-1} + E_nR_1, \end{aligned}$$

et cette expression, en vertu d'une propriété connue des coefficients du binôme de Newton, savoir

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots p} = \frac{(n+1)n\ldots(n-p+2)}{1.2\ldots p},$$

donnera le résultat demandé :

$$A_{n+1} \triangleq R_{n+1} + \frac{n+1}{1} E_1 R_n + \frac{(n+1)n}{1.2} E_2 R_{n-1} + \cdots$$
$$+ \frac{n+1}{1} E_n R_1 + E_{n+1},$$

c'est-à-dire la formule même de Somoff et Lévy pour A_{n+1}. La loi étant vraie pour $n = 2, 3$, est donc vraie en général.

On remarquera que cette équation (117) peut s'écrire symboliquement sous la même forme que notre relation (112),

$$A_n \triangleq (R_1 + E_1)^n,$$

mais en l'interprétant d'une autre manière : on développera le second membre par la formule du binôme, en changeant les exposants en indices et plaçant toujours la lettre E la première dans les produits partiels.

77. La méthode employée au n° 72 s'applique également à la recherche des accélérations angulaires de différents ordres d'un solide, dans le mouvement absolu et le mouvement relatif.

Supposons qu'un corps solide Σ soit mobile autour d'un point fixe O, et que son mouvement relatif soit rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz mobiles autour du point O. Nous désignerons par $OP, OP_1, \ldots, OP_n$ les droites qui représentent l'axe instantané de rotation et les accélérations angulaires du premier, ... du $n^{\text{ième}}$ ordre du solide, à un instant quelconque t; par $P, P_1, \ldots, P_n$ leurs valeurs; par $OQ, OQ_1, \ldots, OQ_n$, l'axe de rotation et les accélérations angulaires d'ordres $1, \ldots n$, du système de comparaison $Oxyz$, leurs grandeurs étant $Q, Q_1 \ldots, Q_n$; enfin, par $OS, OS_1, \ldots, OS_n$ l'axe instantané de rotation et les accélérations angulaires d'ordres $1, \ldots n$, de Σ dans son mouvement absolu, $S, S_1, \ldots, S_n$ désignant les valeurs de ces accélérations.

D'après les remarques faites au début de ce travail, OP_1 est égal et parallèle à la vitesse relative du point P, de sorte que P_1

est l'*index relatif* de P, P_2 l'index relatif de P_1, etc.... De même, Q_n est l'index d'ordre *n* du point Q, S_n l'index d'ordre *n* du point S. La même lettre désignera donc encore, comme au n° 71, un rayon vecteur et le point qui forme son extrémité.

La règle de la composition des rotations autour d'axes concourants nous donne immédiatement

$$S \triangleq P + Q,$$

et nous en conclurons, en vertu du principe établi au n° 70,

$$A_1S \triangleq A_1P + A_1Q,$$

ou encore, d'après l'équation (110), et en observant que $A_1S = S_1$,

$$(118) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 \triangleq R_1P + E_1P + R_1Q + E_1Q,$$

ce qui s'écrira symboliquement

$$(118') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_1 \triangleq (R_1 + E_1)(P + Q),$$

en ayant soin de ne pas intervertir l'ordre des facteurs dans les produits partiels. On aura de même

$$S_2 = A_1S_1 \triangleq R_1S_1 + E_1S_1,$$

ou, symboliquement,

$$S_2 \triangleq (R_1 + E_1) S_1$$

et en remplaçant S_1 par ses composants (118), ce qui est permis d'après le théorème du n° 70, on aura la formule

$$S_1 \triangleq (R_1 + E_1)(R_1 + E_1)(P + Q),$$

ou, symboliquement,

$$S_2 \triangleq (R_1 + E_1)^2 (P + Q);$$

enfin, en général,

$$(119) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_n \triangleq (R_1 + E_1)^n (P + Q).$$

Le sens de cette formule est donc celui-ci : on développera complètement le produit $(R_1 + E_1)^n (P + Q)$ comme si R_1, E_1, P, Q étaient des quantités, sans jamais modifier l'ordre des facteurs dans les produits partiels, et l'on construira la résultante géométrique de toutes les droites figurées par les termes du produit : cette résultante sera l'accélération angulaire absolue S_n. C'est le même système d'interprétation que pour la formule (112).

78. La formule (119) conduit aussi immédiatement aux expressions, complètement développées, des composantes de l'accélération angulaire S_n suivant les axes mobiles Ox, Oy, Oz, et l'on en tire des conséquences intéressantes.

Ainsi, pour le premier ordre, on tire de l'équation (118′) ou (118),

$$S_{1x} = R_{1x}P + R_{1x}Q + E_{1x}P + E_{1x}Q,$$

ou

$$S_{1x} = \frac{dP_x}{dt} + \frac{dQ_x}{dt} + (\beta P_{1z} - \gamma P_{1y}) + (\beta Q_{1z} - \gamma Q_{1y}).$$

Le dernier terme se réduit évidemment à zéro; les autres, par la substitution de p à P_x, etc., α à Q_x,..., donnent

$$(120) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} S_{1x} &= \frac{dp}{dt} + (\beta r - \gamma q) + \frac{d\alpha}{dt}, \quad \text{et de même} \\ S_{1y} &= \frac{dq}{dt} + (\gamma p - \alpha r) + \frac{d\beta}{dt}, \\ S_{1z} &= \frac{dr}{dt} + (\alpha q - \beta p) + \frac{d\gamma}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Nous retrouvons les formules (3) et les conséquences que nous en avons tirées au n° 3. On déduit des équations (120) celle-ci :

$$(121) \quad \ldots\ldots \quad S_1 \stackrel{\frown}{=} P_1 + E_1Q + Q_1,$$

qui renferme le théorème de M. Resal.

De même, pour la suraccélération angulaire, nous aurons par l'équation (119),

$$S_2 \overset{\frown}{=} R_1R_1P + R_1E_1P + E_1R_1P + E_1E_1P + R_1R_1Q + R_1E_1Q + E_1R_1Q + E_1E_1Q.$$

E_1Q étant nul, on a simplement, en projection sur Ox,

$$S_{2x} = R_{1x}R_1P + R_{1x}E_1P + E_{1x}R_1P + E_{1x}E_1P + R_{1x}R_1Q + E_{1x}R_1Q.$$

Or,

$$R_{1x}R_1P = \frac{d^2p}{dt^2}, \quad R_{1x}E_1P = \frac{d(\beta r - \gamma q)}{dt},$$

$$E_{1x}R_1P = \beta R_{1z}D - \gamma R_{1y}P = \beta\frac{dr}{dt} - \gamma\frac{dq}{dt},$$

$$E_{1x}E_1P = \beta E_{1z}P - \gamma E_{1y}P = \beta(\alpha q - \beta p) - \gamma(\gamma p - \alpha r),$$

$$R_{1x}R_1Q = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad E_{1x}R_1Q = \beta R_{1z}Q - \gamma R_{1y}Q = \beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}.$$

Substituant, on a

$$(122)\quad \left\{ \begin{aligned} S_{2x} &= \frac{d^2p}{dt^2} + 2\left(\beta\frac{dr}{dt} - \gamma\frac{dq}{dt}\right) \\ &+ \left[\frac{d\beta}{dt}r - \frac{d\gamma}{dt}q + \beta(\alpha q - \beta p) - \gamma(\gamma p - \alpha r)\right] + \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Une permutation circulaire donnera les expressions de S_{2y}, S_{2z}, en fonction de p, q, r, α, β, γ et de leurs dérivées par rapport à t.

Remarquons maintenant que, dans le second membre de (122), le premier terme représente évidemment $R_{2x}P$ ou P_{2x}; le deuxième groupe peut s'écrire $2E_{1x}P_1$; le troisième groupe, comparé avec le dernier de l'équation (113), en dérive par la substitution de p, q, r à x, y, z; il représente donc $E_{2x}P$. Enfin, le troisième groupe, auquel se réduirait le second membre si p, q, r étaient toujours nuls, c'est-à-dire si le solide était lié au système de

comparaison, ne peut être que Q_{2x}. On peut raisonner de même sur S_{2y}, S_{2z}, et il en résulte l'équipollence

$$(123) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad S_2 \triangleq P_2 + 2E_1P_1 + E_2P + Q_2.$$

Ainsi, *la suraccélération angulaire absolue d'un solide est la résultante : 1° de la suraccélération angulaire relative; 2° d'une composante égale au double de la vitesse d'entraînement du pôle de l'accélération angulaire relative ; 3° d'une composante égale à l'accélération d'entraînement du pôle de la rotation relative; 4° de la suraccélération angulaire d'entraînement.*

79. Remarquons encore ici, en passant, que notre calcul donne les expressions des composantes de la suraccélération angulaire d'un solide suivant trois axes liés au solide, puisque nous avons

$$\left\{\begin{aligned} Q_{2x} &= \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}, \\ Q_{2y} &= \frac{d^2\beta}{dt^2} + \gamma\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\gamma}{dt}, \\ Q_{2z} &= \frac{d^2\gamma}{dt^2} + \alpha\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned}\right.$$

formules qui ne diffèrent d'ailleurs que par les notations des équations (5).

Ce résultat peut s'énoncer sous forme de théorème : $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ est la projection sur Ox de l'accélération relative du point Q, donc $R_{2x}Q$; $\beta\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\beta}{dt}$ est la projection de la vitesse d'entraînement du point Q_1, qui a pour coordonnées $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$, comme on l'a vu plus haut. On a donc

$$Q_2 \triangleq R_2Q + E_1Q_1.$$

On peut donc dire que *la suraccélération angulaire d'un solide est la résultante : 1° de l'accélération relative, par rapport au solide lui-même, du pôle de la rotation; 2° de la vitesse d'entraînement, due à la rotation du solide, du pôle de l'accélération angulaire.*

80. On voit se dessiner, dans les formules (121) et (123), une loi qui se rapproche du théorème de Somoff-Lévy, et que nous allons établir d'une manière générale.

Partant toujours de l'équation

$$S \triangleq P + Q,$$

et appliquant au mouvement des points P, Q, S, la remarque du n° 70, nous aurons l'égalité

$$A_n S \triangleq A_n P + A_n Q.$$

D'après ce que nous avons dit au n° 77, $A_n S$ ou S_n n'est autre chose que l'accélération angulaire absolue d'ordre n du solide, et $A_n Q$ l'accélération angulaire Q_n du système de comparaison.

On peut donc écrire

$$S_n \triangleq A_n P + Q_n.$$

D'autre part, l'accélération absolue d'ordre n du pôle P de la rotation relative du solide se déduit immédiatement de la formule (117) du n° 76, en appliquant au point P ce qui y est dit d'un point mobile quelconque. On aura ainsi

$$A_n P = R_n P + \frac{n}{1} E_1 R_{n-1} P + \frac{n(n-1)}{1.2} E_2 R_{n-2} P + \cdots + \frac{n}{1} E_{n-1} R_1 P + E_n P,$$

et comme on a évidemment

$$R_1 P = P_1, \quad R_2 P = P_2, \quad R_n P = P_n,$$

il viendra, cette substitution faite,

$$(124) \left\{ \begin{aligned} S_n \triangleq P_n + \frac{n}{1} E_1 P_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} E_2 P_{n-2} + \cdots + \frac{n(n-1)}{1.2} E_{n-2} P_2 \\ + \frac{n}{1} E_{n-1} P_1 + E_n P + Q_n. \end{aligned} \right.$$

Cette égalité pourrait s'écrire symboliquement

(125) . . . . . $S_n \triangleq (P + E_1)^n + Q_n$,

en sous-entendant *que l'on développera* $(P + E_1)^n$ *par la formule du binôme, en remplaçant les exposants de* P *par des indices,* P^n *par* P_n, etc...; *en remplaçant les exposants de* E_1 *aussi par des indices,* E_1^2 *par* E_2, ... *et* E_1^0 *par* 1; *en plaçant enfin les facteurs en* E *devant les facteurs en* P.

Ces formules (124) et (125) sont remarquables par leur simplicité et par la loi qu'elles expriment, mais elles sont, au fond, beaucoup moins utiles que la formule (119), qui non seulement donne aussi la composition géométrique de S_n, mais qui permet de calculer immédiatement les expressions des composantes de S_n en fonction de $p, q, r, \alpha, \beta, \gamma$ et de leurs dérivées, tandis que l'équation (125) renferme, par exemple, une composante Q_n dont on ne sait rien et qu'elle ne fournit aucun moyen de déterminer.

§ 12. *Cas où le système de comparaison est animé d'un mouvement de translation.*

81. On a supposé jusqu'ici que le système de comparaison $Oxyz$ ait une origine fixe O. Nous devons étendre nos formules au cas où cette origine est elle-même mobile.

Soit ΩXYZ le système d'axes fixes auquel on rapporte le mouvement absolu, le système de comparaison $Oxyz$ étant doué d'un mouvement quelconque. Conservant les mêmes notations pour le mouvement de ce système autour du point O, appelons U_1 la vitesse, $U_2, U_3, \ldots, U_n$ les accélérations du premier, ..., du $(n-1)^{me}$ ordre de l'origine O, rapportées au système ΩXYZ. Les mêmes lettres désigneront aussi les index de divers ordres du point O, relativement à l'origine fixe Ω.

Le rayon vecteur ΩM du point mobile M est la résultante de ΩO et de $\Omega M'$ égal et parallèle à OM; donc, relativement à l'origine Ω, M est le résultant de O et de M', et l'on a par le principe du n° 70,

$$A_n M \triangleq A_n O + A_n M',$$

A_n désignant toujours l'accélération absolue d'ordre $n - 1$. Mais comme $A_n O$ n'est autre chose que U_n, on a aussi

$$A_n M \simeq U_n + A_n M'.$$

Mais le mouvement du point M' par rapport au système fixe ΩXYZ est identique au mouvement relatif du point M lui-même par rapport à un système de comparaison Oξηζ qui, ayant son origine mobile en O, resterait constamment parallèle aux axes ΩX, ΩY, ΩZ et n'aurait, par conséquent, que la translation à vitesse U_1. Or, ce mouvement possède avec le mouvement relatif du point M par rapport à $Oxyz$ les mêmes relations que le mouvement absolu dans le problème du § 11, puisque les systèmes Oξηζ, $Oxyz$ ont l'origine commune. Si donc nous conservons aux lettres R et E le même sens que précédemment, c'est-à-dire que la première se rapporte au mouvement relatif par rapport à $Oxyz$, la deuxième au mouvement d'entraînement *dû à la rotation du système* Oxyz *autour du point* O *seulement*, nous aurons, en vertu de la formule (112),

$$A_n M \simeq U_n + (R_1 + E_1)^n M,$$

ou, en supprimant la lettre M inutile,

$$(126) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad A_n \simeq U_n + (R_1 + E_1)^n.$$

Donc, en général, *l'accélération d'ordre* n *d'un point est la résultante de l'accélération absolue de même ordre de ce point, déterminée en traitant l'origine* O *du système de comparaison comme un point fixe* (ou en faisant abstraction du mouvement de translation de ce système), *et de l'accélération de même ordre de cette même origine* O.

82. L'application analytique de cette formule se fera sans difficulté, comme au n° 73. Ainsi, en prenant $n = 2$, on aura

$$A_2 \simeq U_2 + R_1 R_1 + R_1 E_1 + E_1 R_1 + E_1 E_1,$$

et en projection sur l'axe Ox,

$$A_{2x} = U_{2x} + R_{1x}R_1 + R_{1x}E_1 + E_{1x}R_1 + E_{1x}E_1.$$

Donc, x, y, z désignant toujours les coordonnées du point M relatives à $Oxyz$,

$$A_{2x} = U_{2x} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\beta z - \gamma y) + \left(\beta\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dy}{dt}\right) + \beta E_{1z} - \gamma E_{1y},$$

ou, enfin,

$$A_{2x} = U_{2x} + \frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(\beta\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dy}{dt}\right)$$
$$+ \left[\frac{d\beta}{dt}z - \frac{d\gamma}{dt}y + \beta(\alpha y - \beta x) - \gamma(\gamma x - \alpha z)\right],$$

et de même pour les composantes parallèles à Oy, Oz de l'accélération absolue. On peut aussi écrire, comme au n° 75,

$$A_2 \bumpeq U_2 + R_2 + 2E_1R_1 + E_2,$$

et l'on procéderait de même pour les composantes des ordres plus élevés. En résumé, la formule (126) fournit sans difficulté, directement et pour un ordre quelconque, les expressions des composantes parallèles aux axes mobiles de l'accélération absolue en fonction des éléments dont dépendent le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement. On peut en déduire divers théorèmes comme plus haut, ainsi que l'extension du théorème Somoff-Lévy, comme on va le voir.

Observons d'abord que, dans l'équation (126), le terme $(R_1 + E_1)^n$ représente symboliquement la composition de l'accélération absolue A_n, abstraction faite de la translation du système $Oxyz$, et peut être développé d'après la formule (117). On a donc

$$A_n \bumpeq U_n + R_n + \frac{n}{1}E_1R_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}E_2R_{n-2} + \cdots + \frac{n}{1}E_{n-1}R_1 + E_n.$$

Mais, si l'on conçoit pour un instant le point M lié au système

de comparaison, ce qui annule R_1, R_2 ..., R_n, on aurait

$$A_n \simeq U_n + E_n,$$

en sorte que la résultante de ces deux accélérations U_n et E_n n'est autre (chose facile à voir d'ailleurs) que l'accélération d'entraînement totale d'ordre $n - 1$ du point M, que nous pouvons désigner par E'_n. Nous aurons alors

$$(127) \quad A_n \simeq R_n + \frac{n}{1} E_1 R_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} E_2 R_{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} E_{n-1} R_1 + E'_n,$$

ce qui est identiquement l'expression du théorème énoncé par M. Maurice Lévy dans le *Compte rendu* de la séance du 29 avril 1878. Toutefois, la conception des *index* de divers ordres et les notations que nous avons proposées nous semblent rendre beaucoup plus nets l'énoncé et l'écriture de ce théorème.

83. Une autre méthode conduit à une formule également très commode, et même, à certains égards, plus avantageuse.

D'après le principe fondamental du mouvement relatif, la vitesse absolue A_1 du point M est la résultante de sa vitesse relative R_1 et de sa vitesse d'entraînement, laquelle, à son tour, se compose de la vitesse due à la translation U_1 du système mobile, et de la vitesse d'entraînement E_1 due à la rotation de ce système autour du point O. Nous aurons donc immédiatement

$$A_1 \simeq U_1 + R_1 + E_1.$$

L'origine du rayon vecteur du point A_1 étant le point fixe Ω, imaginons un système de comparaison $\Omega\xi\eta\zeta$ ayant son origine en Ω et ayant autour de ce point le même mouvement que le système $Oxyz$ autour du point O. Rapportons l'index mobile A_1 à ce nouveau système de comparaison, et nous aurons immédiatement

$$A_1 A_1 \simeq R_1 A_1 + E_1 A_1.$$

Mais $A_1 A_1$ n'est autre chose que A_2; d'autre part, d'après la

relation ci-dessus et le principe du n° 70, on a aussi

$$R_1A_1 \stackrel{\frown}{=} R_1U_1 + R_1R_1 + R_1E_1,$$
$$E_1A_1 \stackrel{\frown}{=} E_1U_1 + E_1R_1 + E_1E_1,$$

d'où, substituant dans l'équipollence précédente et écrivant sous forme de produit symbolique,

$$A_2 \stackrel{\frown}{=} (R_1 + E_1)(U_1 + R_1 + E_1).$$

En raisonnant sur le point A_2 comme sur A_1, on trouvera

$$A_3 \stackrel{\frown}{=} (R_1 + E_1)^2 (U_1 + R_1 + E_1),$$

et en général,

(128) . . . $A_n \stackrel{\frown}{=} (R_1 + E_1)^{n-1} (U_1 + R_1 + E_1).$

Cette formule symbolique renferme la solution complète du problème, en développant comme un produit sans changer l'ordre des facteurs dans les produits partiels et tenant compte de la signification des lettres R_1 et E_1. Elle a même l'avantage de donner les expressions des composantes de U_2, U_3, ... U_n, comme on va le voir.

84. Remarquons d'abord que cette équipollence peut se mettre sous la forme

$$A_n \stackrel{\frown}{=} (R_1 + E_1)^{n-1}U_1 + (R_1 + E_1)^n;$$

et, si on la compare avec l'équation (126), on en tire de suite

$$U_n \stackrel{\frown}{=} (R_1 + E_1)^{n-1}U_1,$$

relation d'ailleurs facile à justifier.

Cela posé, appliquons l'équation (128) au cas de $n = 2$. Nous aurons

$$A_2 \stackrel{\frown}{=} (R_1 + E_1)(U_1 + R_1 + E_1),$$

ou, en développant et mettant l'indice x,

$$A_{2x} = R_{1x}U_1 + E_{1x}U_1 + R_{1x}R_1 + R_{1x}E_1 + E_{1x}R_1 + E_{1x}E_1,$$

ou encore

$$A_{2x} = \frac{dU_{1z}}{dt} + \beta U_{1z} - \gamma U_{1y} + \frac{dR_{1z}}{dt} + \frac{dE_{1z}}{dt} + \beta R_{1z} - \gamma R_{1y}$$

$$+ \beta E_{1z} - \gamma E_{1y} = \frac{dU_{1x}}{dt} + \beta U_{1z} - \gamma U_{1y} + \frac{d^2x}{dt} + 2\left(\beta \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dy}{dt}\right)$$

$$+ \left[\frac{d\beta}{dt} z - \frac{d\gamma}{dt} y + \beta(\alpha y - \beta x) - \gamma(\gamma x - \alpha z)\right].$$

On obtiendra A_{2y}, A_{2z} par une simple permutation circulaire. Cette équation ne diffère de celle du n° 82 que par la substitution à U_{2x} de son expression développée, et l'on aurait le même résultat pour les accélérations d'ordre supérieur en faisant, dans l'équation (127), $n = 3, 4, \ldots$ On voit combien l'emploi de cette formule est commode et avantageux.

§ 13 *Applications des formules obtenues précédemment.*

85. La formule (117) est susceptible d'applications nombreuses, parmi lesquelles nous traiterons d'abord celle-ci.

Lorsqu'un point mobile décrit une courbe plane, au point de vue purement géométrique, on peut toujours supposer qu'il glisse sur une droite (le rayon vecteur) tournant d'un mouvement uniforme autour d'un point fixe O. Dans cette hypothèse, nous déterminerons la vitesse et les accélérations de divers ordres du mobile M, en fonction des coordonnées polaires r et θ, au moyen de l'équipollence

$$(117) \quad A_n \triangleq R_n + \frac{n}{1} E_1 R_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} E_2 R_{n-2} + \cdots + \frac{n}{1} E_{n-1} R_1 + E_n.$$

Dans le mouvement relatif, le point M glisse simplement sur le rayon vecteur OS (système de comparaison); on a donc, ce mouvement étant rectiligne,

$$R_1 = \frac{dr}{dt}, \quad R_2 = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \ldots \quad R_n = \frac{d^nr}{dt^n},$$

et ces accélérations sont dirigées, à partir du point M_1 dans la direction OS ou dans la direction opposée suivant que les dérivées qui les représentent sont *positives* ou *négatives*.

Pour déterminer les accélérations d'entraînement, nous considérons d'abord un point N fixé sur une droite ON tournant autour d'un point fixe O avec une vitesse constante ω ; $\rho = ON$ est donc constant. Sa vitesse E_1N sera donc normale à ρ, dans le sens de la rotation ω, et égale à $\omega\rho$. L'index E_1 du point N est donc sur la perpendiculaire OE_1 à ON dans le sens indiqué, à une distance constante $OE_1 = \omega\rho$; sa vitesse est donc normale à OE_1, dans le sens de la rotation ω, et égale à $\omega . OE_1 = \omega^2\rho$. L'index du point E_1, qui n'est autre que l'index du second ordre E_2 du point N_1, est donc dirigé dans le prolongement de ON, à une distance $OE_2 = \omega^2\rho$ qui est aussi constante.

Continuant de cette manière, on voit que l'index E_3 sera sur une direction faisant avec ON un angle de 270° dans le sens de ω, à la distance $OE_3 = \omega^3\rho$, etc.... Les accélérations $E_1, E_2, \ldots, E_n$ du point N ont donc les valeurs respectives $\omega\rho$, $\omega^2\rho$, ... $\omega^n\rho$, et leurs directions font, avec OS, dans le sens de la rotation ω, des angles égaux à un, deux, ..., n angles droits.

Appliquons ceci au problème proposé. L'index R_{n-1} est sur OS à une distance ρ égale à $\frac{d^{n-1} r}{dt^{n-1}}$; sa vitesse d'entraînement est, d'après ce qui précède, égale au produit $\omega\rho$, elle est normale à OR_{n-1} dans le sens de la rotation ω.

Il faut remarquer que, si la dérivée $(n - 1)^{me}$ de r était négative, OR_{n-1} aurait la direction opposée à OM et la composante E_1R_{n-1}, au lieu de faire avec OM un angle droit dans le sens de ω, ferait un angle égal à trois droits. Cette observation subsiste pour les composantes suivantes.

De même, l'index R_{n-2} est situé sur OS (ou sur son prolongement) à une distance $\frac{d^{n-2} r}{dt^{n-2}}$, son accélération d'entraînement E_2R_{n-2} sera, d'après ce qu'on a vu plus haut, égale à $\omega^2 \frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}}$, et fera un angle égal à deux droits avec OR_{n-2}. Et ainsi de suite. On aura enfin $E_n = \omega^n r$, la direction de cette accélération faisant avec OM, dans le sens de ω, un angle égal à $\frac{n\pi}{2}$. Nous aurons donc, pour l'accélération d'ordre $n - 1$ du point mobile, par la

formule (117),

$$(129)\quad \left\{ \begin{aligned} A_n = \frac{d^n r}{dt^n} + \frac{n}{1}\omega\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^2\frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}} + \dots \\ + \frac{n}{1}\omega^{n-1}\frac{dr}{dt} + \omega^n r, \end{aligned} \right.$$

et les directions des composantes qui figurent dans le second membre sont données par ces règles très simples : 1° *chaque composante fait avec la direction* OS, *dans le sens de la rotation, un angle égal à autant de droits qu'il y a d'unités dans l'exposant de* ω ; 2° *si la dérivée de* r *qui figure dans cette composante est négative, il faut ajouter deux angles droits à cet angle ou renverser la direction de la composante.*

86. De là se déduisent sans peine les deux composantes de l'accélération A_n, l'une A_{nr} suivant la direction OS du rayon vecteur, l'autre A_{np} normale à ce rayon dans le sens de la rotation. Nous aurons en effet

$$(130)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{nr} &= \frac{d^n r}{dt^n} - \frac{n(n-1)}{1.2}\omega^2\frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\omega^4\frac{d^{n-4}r}{dt^{n-4}} - \dots \\ A_{np} &= n\omega\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\omega^3\frac{d^{n-3}r}{dt^{n-3}} + \dots \end{aligned} \right.$$

On leur donne une autre forme en introduisant les dérivées du rayon vecteur par rapport à l'angle polaire, compté dans le sens de ω. On a, ω étant constant,

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \qquad \frac{d^n r}{dt^n} = \omega^n \frac{d^n r}{d\theta^n}.$$

Donc

$$(131)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{nr} &= \omega^n\left[\frac{d^n r}{d\theta^n} - \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}r}{d\theta^{n-2}} + \frac{n(n-1)\dots(n-3)}{1.2.3.4}\frac{d^{n-4}r}{d\theta^{n-4}} - \dots\right], \\ A_{np} &= \omega^n\left[n\frac{d^{n-1}r}{d\theta^{n-1}} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{d^{n-3}r}{d\theta^{n-3}} + \dots\right]. \end{aligned} \right.$$

Les rapports de ces composantes à ω^n ne dépendent donc plus que de la forme de la trajectoire.

87. On tire aussi de là les composantes tangentielle et normale, A_{nv} et A_{nN}, de l'accélération. Pour cela, observons que $n = 1$ dans les formules (131) nous donne

$$A_{1r} = \omega \frac{dr}{d\theta} \quad \text{et} \quad A_{1p} = \omega r,$$

pour les composantes de la vitesse A_1 du point M, donc

$$A_1 = \omega \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}} = \omega \frac{ds}{d\theta}.$$

Les cosinus des angles que la vitesse A_1 fait avec le rayon OM et sa perpendiculaire sont donc donnés par les formules

$$(132) \quad \ldots\ldots \quad \frac{A_{1r}}{A_1} = \frac{dr}{ds}, \quad \frac{A_{1p}}{A_1} = r\frac{d\theta}{ds},$$

formules d'ailleurs connues. On aura donc

$$A_{nv} = A_{nr} \cos \overline{rv} + A_{np} \cos \overline{pv}, \quad A_{nN} = A_{nr} \cos \overline{pv} + A_{np} \cos \overline{rv},$$

d'où, par simple substitution,

$$(133) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} A_{nv} = A_{nr} \dfrac{dr}{d\theta} + A_{np} r \dfrac{d\theta}{ds}, \\ A_{nN} = -A_{nr} r \dfrac{d\theta}{ds} + A_{np} \dfrac{dr}{ds}, \end{cases}$$

où l'on mettra pour A_{nr} et A_{np} leurs valeurs (131).

Pour l'accélération du premier ordre, $n = 2$, on a

$$A_{2r} = \omega^2 \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\right), \quad A_{2p} = 2\omega^2 \frac{dr}{d\theta},$$

d'où l'on tire, après réduction,

$$(134) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{2v} &= \omega^2 \left(\frac{d^2r}{d\theta^2} + r\right) \frac{dr}{ds}, \\ A_{2N} &= \omega^3 \left(r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right) \frac{d\theta}{ds}. \end{aligned} \right.$$

De même, pour la suraccélération A_3, on trouvera

$$A_{3r} = \omega^3 \left(\frac{d^3r}{d\theta^3} - 3\frac{dr}{d\theta}\right), \quad A_{3p} = \omega^3 \left(3\frac{d^2r}{d\theta^2} - r\right),$$

et au moyen des formules (133),

$$(135) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{3v} &= \omega^3 \left(\frac{d^3r}{d\theta^3}\frac{dr}{d\theta} + 3r\frac{d^2r}{d\theta^2} - 3\frac{dr^2}{d\theta^2} - r^2\right) \frac{d\theta}{ds}, \\ A_{3N} &= \omega^3 \left(-r\frac{d^3r}{d\theta^3} + 3\frac{dr}{d\theta}\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2r\frac{dr}{d\theta}\right) \frac{d\theta}{ds}. \end{aligned} \right.$$

Et ainsi de suite. Ces formules donnent lieu à quelques problèmes. Ainsi, on peut demander quelle trajectoire le mobile doit décrire pour que l'accélération, estimée suivant la direction du rayon vecteur, soit nulle à chaque instant. On devra avoir

$$A_{2r} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} - r = 0,$$

ce qui donne pour l'équation de la courbe,

$$r = Me^{\theta} + Ne^{-\theta},$$

M et N étant des constantes.

Si l'on demande que la suraccélération suivant le rayon vecteur soit nulle, on est conduit à l'égalité

$$\frac{d^3r}{d\theta^3} - 3\frac{dr}{d\theta} = 0,$$

d'où résulte l'équation de la trajectoire

$$r = Me^{\theta\sqrt{2}} + Ne^{-\theta\sqrt{2}} + P.$$

Au contraire, si la suraccélération normale au rayon A_{2r} devait être constamment égale à zéro, on aurait la trajectoire

$$r = Me^{\frac{\theta}{\sqrt{2}}} + Ne^{-\frac{\theta}{\sqrt{2}}}.$$

Tout cela suppose, bien entendu, que la vitesse angulaire du rayon vecteur soit constante.

88. On peut désirer, au point de vue cinématique, des formules plus générales dans lesquelles on ne suppose pas ω constant. Dans ce cas, on partirait encore de la formule (117), et les valeurs de R_1, R_2, ..., R_n resteraient les mêmes. Mais pour calculer les accélérations d'entraînement E_1R_{n-1}, E_2R_{n-2}, ... on se servirait des formules des nos 42 et suivants, qui donneraient, pour un point situé à une distance constante ρ du point O, les formules

$$E_1 \triangleq \omega\rho, \quad E_2 \triangleq \omega^2\rho + \omega'\rho, \quad E_3 \triangleq (\omega'' - \omega^3)\rho + 3\omega\omega'\rho, \quad \text{etc. ...},$$

dans lesquelles on remplacera successivement ρ par

$$\frac{d^{n-1}r}{dt^{n-1}}, \quad \frac{d^{n-2}r}{dt^{n-2}}, \quad \dots$$

et l'on aura égard à la direction des composantes.

89. La théorie du mouvement relatif conduit, par une voie cinématique, aux formules des numéros 42 et 43, concernant les mouvements plans.

Considérons d'abord le cas d'une figure plane tournant autour d'un point fixe C avec une vitesse angulaire variable ω, et soient ω', ω'', ... les dérivées successives de ω par rapport au temps; en d'autres termes, les accélérations angulaires du 1er, du 2me, ...

ordre. Pour déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération d'un point M de la figure mobile, soit u sa distance constante CM au centre fixe; sa vitesse ωu est normale à CM, dans le sens de la rotation ω. Menons CM_1 égal et parallèle à cette vitesse, M_1 sera l'index de M, et la vitesse absolue du point M_1 nous donnera en grandeur et en direction l'accélération de M. Or, cette vitesse de M_1 se compose nécessairement d'une vitesse *relative* M_1P, dirigée suivant CM_1, égale à

$$\frac{d.CM_1}{dt} = \frac{d.\omega u}{dt} = \omega' u,$$

et d'une vitesse d'entraînement M_1Q normale à CM_1, dans le sens de la rotation ω, et égale à $\omega . CM_1 = \omega^2 u$. On voit par là que l'accélération du point M a une composante tangentielle $\omega' u$ et une composante normale vers C égale à $\omega^2 u$.

Menons CM'_2 et CM''_2 respectivement égaux et parallèles à ces deux composantes; leur résultante CM_2 donnera l'index M_2 du second ordre de M, mais pour déterminer l'accélération du second ordre de M ou la vitesse totale du point M_2, il vaut mieux conserver les deux index M'_2 et M''_2 dont M_2 est le résultant, et faire usage du principe du n° 70. De même que plus haut, la vitesse absolue de l'index M'_2 a une composante radicale

$$\frac{d(\omega' u)}{dt} = \omega'' u,$$

et une composante normale $\omega . \omega' u$; de même, la vitesse totale de M''_2 résulte d'une composante suivant CM'_2 égale à $\frac{d(\omega^2 u)}{dt}$ ou $2\omega\omega' u$, et d'une composante normale à cette direction $\omega . \omega^2 u = \omega^3 u$. En ramenant ces quatre composantes au point M et ayant égard à leurs directions, on trouve pour l'accélération du 2e ordre du point M une composante tangentielle $(\omega'' - \omega^3)u$, et une composante normale vers C égale à $3\omega\omega' u$

Il est facile de continuer de même sur l'index M_3 de la suraccélération. On voit déjà que l'accélération d'ordre $n - 1$ aura une composante tangentielle de la forme $q_{n-1} u$, et une compo-

sante normale que nous désignerons par $(-p_{n-1}u)$. La vitesse relative et la vitesse d'entraînement des index correspondant à ces deux composantes auront respectivement pour composantes

$$q'_{n-1}u, \quad \omega q_{n-1}u; \qquad -p'_{n-1}u, \quad -\omega p_{n-1}u,$$

et, en ayant égard à leurs directions respectives, on verra que l'accélération d'ordre n du point M a une composante tangentielle dans le sens de la vitesse, égale à $(q'_{n-1}+p_{n-1}\omega)u$, et une composante normale vers le point C égale à $(q_{n-1}\omega - p'_{n-1})u$, de sorte que si l'on pose

$$p_n = p'_{n-1} - q_{n-1}\omega, \quad q_n = q'_{n-1} + p_{n-1}\omega,$$

les composantes de l'accélération d'ordre n du point M, suivant la tangente et la normale à la trajectoire, auront pour expressions $q_n u$ et $-p_n u$. On retrouve ainsi les formules (65) du n° 42 et les propriétés établies au n° 43, pour le cas actuel, c'est-à-dire celui où la figure tourne autour d'un point fixe.

90. Pour passer au cas général où la figure plane se meut d'une manière quelconque dans son plan, il suffit de regarder son mouvement comme composé d'une translation continue égale au mouvement d'un point déterminé A de la figure mobile, et d'une rotation ω autour de ce point. D'après les propriétés connues du mouvement relatif, si J_n représente l'accélération d'ordre n du point A, j_n l'accélération totale du point M et j'_n son accélération due seulement à la rotation de la figure autour du point A, on aura

$$j_n \triangleq j'_n + J_n,$$

en sorte qu'en désignant par φ l'angle du rayon vecteur AM avec la direction de J_n, on trouvera, pour les composantes normale et tangentielle de j_n,

$$-p_n u - J_n \cos\varphi, \quad q_n + J_n \sin\varphi,$$

c'est-à-dire les formules mêmes du n° 43, et les équations (67).

91. Mais il reste encore à déduire, des éléments qui définissent le mouvement de la figure dans son plan, l'accélération J_n d'un point particulier choisi sur la figure, car ce qui précède ne nous donne que le moyen de déduire l'accélération j_n de tout point de la figure, de celle d'un point donné de cette figure. Pour cela, on choisira pour le point A le point de la figure qui coïncide, à l'instant considéré, avec le centre instantané C de rotation, et on appellera w la vitesse de déplacement de ce centre sur le plan fixe (ou sur le plan mobile, où elle est la même).

On remarquera ensuite que le théorème donné au n° 75 et renfermé sous l'équation (116) s'étend sans difficulté au cas où le système de comparaison a un mouvement de translation, sauf le changement qui suit : H_n représentant l'accélération d'entraînement d'ordre $n-1$ d'un point, en tenant compte du mouvement de l'origine, et E_n la même accélération, mais en tenant compte seulement de la *rotation* du système de comparaison, on aura

$$A_1 H_n \triangleq H_{n+1} + E_n A_1.$$

Ici, le point auquel nous appliquons cette formule est le point C. Son mouvement absolu est celui par lequel il décrit la roulette fixe, son mouvement d'entraînement, celui qu'il subit étant emporté par la figure plane. Donc H_{n+1} n'est autre chose que J_n ; H_n que J_{n-1} ; R_1 est la vitesse relative w avec laquelle le point C se déplace sur la figure mobile, en sorte que, si l'on place l'origine en C, le point R_1 est l'extrémité W de la droite qui figure cette vitesse w ; $E_n R_1$ est donc l'accélération d'entraînement d'ordre $n-1$ de ce point W, due à la rotation de la figure autour du point C. Nous aurons donc

$$J_n \triangleq A_1 J_{n-1} - E_n W.$$

Projetons sur deux axes fixes; nous aurons évidemment

$$A_{1x} J_{n-1} = \frac{dJ_{n-1,x}}{dt}, \quad A_{1y} J_{n-1} = \frac{dJ_{n-1,y}}{dt},$$

et d'après les formules (67) retrouvées ci-dessus,

$$E_{nx}W = p_{n-1}w_x + q_{n-1}w_y, \quad E_{ny}W = p_{n-1}w_y - q_{n-1}w_y,$$

donc enfin

$$J_{nx} = \frac{dJ_{n-1,x}}{dt} - p_{n-1}w_x - q_{n-1}w_y,$$

$$J_{ny} = \frac{dJ_{n-1,y}}{dt} - p_{n-1}w_y + q_{n-1}w_x;$$

c'est-à-dire que l'on retrouve les équations (66).

La question est donc résolue, d'une manière complète, au moyen de considérations purement cinématiques.

SUR LA RÉALITÉ DE L'ESPACE ET LE MOUVEMENT ABSOLU (*)

PAR

M. E. VICAIRE

Inspecteur général des mines.

I

Le mouvement d'un corps ne consiste-t-il qu'en un déplacement de ce corps par rapport à ceux qui l'entourent, en un changement des distances de ses points, ou d'une partie de ses points, à ceux des corps voisins? A-t-il, au contraire, quelque chose d'absolu, qui mérite d'être considéré en soi, et qui subsisterait alors même que tous les autres corps viendraient à être anéantis? Voilà une question qui a reçu, suivant les temps et les auteurs, des solutions complètement opposées.

Pendant de longs siècles, la surface terrestre a été regardée comme absolument fixe et les mouvements rapportés à cette surface, comme des mouvements absolus; quelques philosophes avaient pu le nier, mais l'humanité prise dans son ensemble, même dans sa partie savante, n'en doutait pas. Les vues de Copernic, qui ont supprimé la fixité de la Terre pour la transporter au centre du Soleil; celles de Newton, qui la transportaient au centre

(*) Ce travail a été présenté à la *Société scientifique de Bruxelles*, à sa session d'avril 1894, avec le titre suivant : *Sur le principe de l'inertie et sur la notion du mouvement absolu en mécanique* Le titre ci-dessus a paru en indiquer plus exactement le caractère et l'objet essentiel.

de gravité du système solaire; les découvertes des astronomes modernes, qui ont montré ce système tout entier en mouvement, aussi bien que les étoiles dites fixes; tout cela, certaines doctrines philosophiques aidant, a successivement ébranlé cette confiance, et aujourd'hui l'idée dominante est certainement celle de la relativité du mouvement. Dans les traités de mécanique, on parle toujours du mouvement absolu, on le prend comme point de départ de diverses théories; mais la plupart des auteurs, sans le dire, il est vrai, bien expressément, semblent n'y voir qu'une fiction théorique, un mode d'exposition commode. Je me propose de montrer qu'il y a plus que cela et que le mouvement absolu est une réalité physique.

Ce mouvement est une réalité parce que le lieu d'un corps est une réalité dont l'existence est indépendante de celle de tous les autres corps.

Ce lieu réel a aussi quelque chose qui ne dépend pas du corps lui-même, puisque le corps peut changer de lieu : c'est la définition même du mouvement. Si le lieu ne devait sa réalité qu'à la présence du corps, il n'y aurait pas de mouvement possible.

Le lieu est une portion de l'espace qui emprunte au corps sa délimitation, mais non sa réalité. Donc l'espace est lui-même quelque chose de réel, qui subsiste indépendamment de toute matière.

Cette manière de concevoir l'espace et le mouvement est conforme à celle qu'Euler a exposée dans un mémoire présenté en 1748 à l'Académie des sciences de Berlin (*).

De notre temps, elle a été formulée d'une manière plus précise encore par le R. P. Leray, d'abord dans un opuscule publié en 1869 (**), puis dans son *Essai sur la synthèse des forces physiques* (***). Toutefois, le P. Leray la pose comme un postulat plutôt qu'il ne cherche à la démontrer. Il se borne à montrer

---

(*) *Réflexions sur l'espace et le temps.* (Histoire de l'Acad. roy. des sciences et belles-lettres; tome IV, Berlin, 1750.)
(**) *Constitution de la matière et ses mouvements.* Paris, Gauthier-Villars, 1869.
(***) Paris, Gauthier-Villars, 1885.

qu'elle ne choque en rien les principes fondamentaux de la métaphysique.

On peut rattacher à la même conception les vues émises par le savant géomètre allemand, Charles Neumann, dans un discours célèbre prononcé en 1869, dans une séance de l'Université de Leipzig (*). L'idée de Neumann semble être, au fond, la même que celle d'Euler, mais elle est présentée sous une forme assez différente et, nous le verrons, peu heureuse.

Plus récemment et provoqué, du reste, par ce discours de Neumann, un autre géomètre allemand, Henri Streintz, a soumis cette question à un examen approfondi, dans un ouvrage consacré à l'étude des principes fondamentaux de la mécanique (**). Streintz ne dit rien sur la nature de l'espace, mais quant au mouvement, il adopte une distinction déjà posée par Kant (***), entre le mouvement de translation et celui de rotation. Le premier ne peut pas être distingué expérimentalement du mouvement de l'espace en sens contraire; considéré en dehors de toute relation avec une matière extérieure au corps, c'est-à-dire comme mouvement absolu, il est impossible.

Au contraire, le mouvement de rotation d'un corps, distingué du mouvement de l'espace en sens inverse, est une réalité (*ein wirkliches Prædicat*); le mouvement opposé d'un espace relatif n'est pas réel; si on le prend pour tel, c'est une simple illusion.

Cette distinction, nous le verrons, est fondée sur l'expérience, mais je pense qu'elle n'a pas une importance si fondamentale.

Quoi qu'il en soit, nous nous trouvons en présence de trois systèmes différents : le mouvement entièrement absolu, le mouvement exclusivement relatif et le système mixte de Kant et de Streintz. Voyons à choisir entre eux.

(*) *Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie*. Leipzig, Teubner, 1870.

(**) *Die physikalischen Grundlagen der Mechanik*. Leipzig, Teubner, 1883.

(***) Kant, *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Kant dit improprement « mouvement rectiligne » et « mouvement circulaire » au lieu de translation et rotation. Il est vrai que, à l'époque où il écrivait, ces derniers mots n'avaient pas la signification précise qu'ils ont aujourd'hui en mécanique.

II

Neumann raisonne ainsi :

Envisageant le principe de l'inertie, énoncé par Galilée, et qui consiste en ce qu'un point matériel en mouvement, qui n'est soumis à aucune action étrangère, se meut en ligne droite, en parcourant des espaces égaux dans des temps égaux, Neumann constate que déjà la première partie de cet énoncé n'a pas de sens, à moins d'une hypothèse préalable.

Qu'est-ce, en effet, qu'un mouvement en ligne droite? Tel mouvement, qui paraît rectiligne à un observateur placé sur la Terre, serait curviligne pour un observateur placé sur le Soleil, et curviligne encore, mais suivant de tout autres courbes, si l'observateur se transportait sur Jupiter ou sur Saturne.

Donc, pour que l'énoncé de Galilée soit autre chose que des mots sans signification, il faut qu'on nous désigne un corps, dans l'univers, qui servira de base à nos jugements, de système de comparaison. Il est visible que ce corps doit être le même pour tous les mouvements existants ou possibles de l'univers et qu'aucun des corps connus ne peut prétendre à ce rôle prépondérant et vraiment souverain.

Donc enfin, conclut Neumann, « comme premier principe de la mécanique, il faut placer ce postulat qu'il existe, en quelque lieu inconnu de l'univers, un corps inconnu, absolument rigide, dont la figure et les dimensions sont à tout jamais invariables ».

C'est ce corps que, pour la commodité du discours, il appelle le corps *Alpha*, et, dans l'énoncé de Galilée, on doit sous-entendre que tous les mouvements sont rapportés à ce corps.

La première partie de ce raisonnement est inattaquable. Si grande est l'importance du principe de l'inertie, si nombreuses en sont les vérifications, qu'il est impossible d'admettre qu'il n'ait pas une signification réelle et que les conditions nécessaires pour cela ne soient pas remplies dans la nature.

Il faut donc un système de comparaison. Mais le corps Alpha semble très mal choisi pour remplir cette fonction.

Son premier défaut est d'avoir une définition contradictoire en elle-même. Qui dit corps, dit une certaine quantité de matière; qui dit matière, dit quelque chose d'essentiellement mobile. Le corps Alpha, au contraire, est formé d'une matière dont les parties ne peuvent se mouvoir ni d'une manière absolue, ni même les unes par rapport aux autres, puisqu'il est et doit être indéformable. Il diffère essentiellement de tous les corps connus. C'est un corps qui n'en est pas un.

Mais ce qui est plus grave encore, c'est qu'il est essentiellement impropre à l'office qui lui est assigné.

Cet office, cette fonction, Neumann le dit justement, est une fonction souveraine. Ce système de comparaison gouverne d'une manière absolue tous les mouvements de la nature : chaque point en mouvement, dans l'immensité de l'univers, règle à tout instant sa vitesse d'après la position qu'il occupe par rapport à lui. Il ne suffit donc pas qu'il existe quelque part un objet sur lequel nous puissions, en imagination, repérer les mouvements, il faut encore que l'influence de cet objet, de ce système de comparaison, se fasse sentir effectivement sur chaque partie de la matière en mouvement; il faut qu'il existe entre lui et elle un *lien physique.*

Cette influence physique est énorme. C'est elle qui maintient la toupie debout sur sa pointe malgré la pesanteur qui tend à la renverser. Attribuer cette action à un corps quelconque, et surtout à « un corps inconnu situé en quelque lieu inconnu », c'est évidemment dépasser toutes les analogies.

Le corps Alpha ne remplit donc pas notre programme : il nous fallait un maître absolu et nous n'avons qu'un soliveau, bon tout au plus à faire un roi fainéant.

Un exemple, que j'emprunte encore à Neumann, montrera, sous une forme plus concrète, et la nécessité d'un système de comparaison universel, et l'impuissance du corps Alpha à jouer ce rôle.

« Admettons, dit ce géomètre, que, parmi les étoiles, il en
» existe une formée d'une matière fluide, qui soit, comme notre
» Terre, animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe

» passant par son centre. Elle doit avoir la forme d'un ellipsoïde
» aplati. Quelle forme devra-t-elle prendre si nous supposons
» que tous les autres corps célestes soient subitement anéantis?
» Les forces centrifuges sont complètement indépendantes de
» ces autres corps, et, par conséquent, la forme aplatie doit
» subsister.
» Mais si nous considérons le mouvement comme une chose
» exclusivement relative, comme ne consistant qu'en un déplace-
» ment relatif de deux points, puisque, dans notre hypothèse, il
» n'y a plus de déplacement relatif, il n'y a plus de mouvement,
» donc plus de force centrifuge, et le corps, se trouvant en repos,
» doit prendre la forme sphérique.
» On ne peut sortir de cette contradiction qu'en envisageant
» le mouvement comme quelque chose d'absolu, ce qui conduit
» au principe du corps Alpha. »

Tout est parfait jusqu'au dernier membre de phrase exclusivement. Mais il est visible que le corps Alpha ne lève pas la difficulté ; car si nous pouvons anéantir tous les corps observables sans qu'il en résulte aucune modification des forces centrifuges et par conséquent de la figure de notre astre, pourquoi la suppression du corps Alpha produirait-elle un autre effet?

Or, si nous le supprimons, il ne reste plus aucune matière en dehors de l'astre tournant. C'est donc indépendamment de toute matière extérieure que sa rotation doit être mesurée et que nous devons pour cela trouver un système de comparaison.

Sans doute, si nous devions, nous hommes, la constater expérimentalement, nous aurions besoin de repères matériels. Mais tel n'est pas le cas : les mouvements de la nature se passent très bien de nous et de nos mesures.

Neumann a remarqué lui-même qu'il n'est pas du tout nécessaire que le système invariable de points ou de lignes qui constitue le corps Alpha, soit réalisé matériellement; on pourrait, par exemple, dit-il, prendre les trois axes principaux d'inertie d'un corps matériel quelconque, même déformable. Ces axes, en effet, étant forcément rectangulaires entre eux, peuvent être considérés comme un système indéformable. La proposition

prise sous cette forme générale devient fausse; car les axes principaux de la Terre, par exemple, à cause de la rotation de celle-ci, sont tout à fait impropres à servir de système de comparaison universel. Mais, en supposant même cette difficulté écartée, un pareil système d'axes a toujours deux défauts essentiels : il dépend de la matière, et il n'a aucun lien physique avec les corps dont il doit régir les mouvements.

C'est surtout cette dernière condition que Neumann a complètement méconnue.

Au lieu du corps Alpha, disons « espace réel », et toutes les difficultés disparaissent. L'espace est immobile et indéformable par essence, par définition, parce que c'est à lui que sont rapportés tous les mouvements. Il faut qu'il soit réel pour exercer cette action souveraine dont nous avons parlé; mais, à cause de sa pénétrabilité absolue, qui le rend présent partout où il y a de la matière, il est éminemment apte à l'exercer.

Il est vrai que cet espace réel ne nous fournit aucun point fixe pour repérer nos observations et nous permettre de mesurer les déplacements absolus; cela est fâcheux pour notre science, sans doute, mais cela importe peu à la nature.

Cette action de l'espace réel sur la matière est ce qui constitue l'*inertie* de celle-ci. C'est une espèce d'adhérence qu'on pourrait être tenté de comparer au frottement. Elle en diffère en ce que le frottement ne peut être surmonté que par une force surpassant une limite déterminée, tandis que toute force, si faible soit-elle, suffit à vaincre l'inertie et à produire un mouvement. C'est ce qui constitue la *mobilité* de la matière.

La résistance d'un milieu, fonction de la vitesse, présente cette même circonstance; mais elle diffère de l'inertie en ce qu'elle tend à diminuer la vitesse une fois acquise. L'inertie, au contraire, ne produit aucune diminution de la vitesse acquise.

III

Pour montrer le lien logique qui existe entre le principe de l'inertie et le postulat d'un système de référence réel, Neumann cite encore un exemple.

Il suppose que toute matière soit détruite, à l'exception de deux points qui s'attirent suivant la loi newtonienne. Si le mouvement ne consiste qu'en un déplacement relatif des parties de la matière, il ne peut plus être question de mouvement en dehors de la droite qui unit ces points ; ceux-ci ne pourront donc se mouvoir que le long de cette droite, et, au lieu de se mouvoir dans des sections coniques, ils devront tomber l'un sur l'autre (au moins sous certaines conditions de vitesses initiales).

Mais on rend, ce me semble, la conclusion plus frappante encore en supposant toute matière anéantie subitement, à l'exception d'un seul point matériel. Dès lors, il ne peut plus y avoir de déplacement relatif des parties de la matière, donc plus de mouvement, si celui-ci n'est pas autre chose. Le concept même de mouvement n'a plus de place dans cet univers réduit.

Il semble cependant naturel d'admettre que la destruction de la matière extérieure n'a pu altérer la vitesse du point restant et que celui-ci va continuer sa route en ligne droite avec la vitesse qu'il avait au moment du cataclysme. S'il en est ainsi, cette ligne droite, qui jouit de cette propriété singulière que le point est obligé de la suivre comme s'il était dans un tube, doit être déterminée d'une manière réelle ; un point ne suffit pas pour la déterminer ; donc il existe quelque chose de réel en dehors de l'unique point matériel.

C'est aussi sur le principe de l'inertie qu'Euler base sa démonstration.

Un corps en repos doit persévérer indéfiniment dans cet état. « Or supposons, dit Euler, que le lieu ne soit autre chose que » la relation d'un corps par rapport aux autres qui l'environnent. Substituons donc cette idée à la place de celle du lieu, » et on sera obligé de dire qu'en vertu de ce principe, un corps

» se trouvant une fois dans une certaine relation avec les autres
» corps qui l'environnent, il s'obstinera de demeurer toujours
» dans cette même relation. »

Il montre qu'il n'en est pas ainsi, par l'exemple d'un corps placé dans une eau dormante. Si l'eau commence à couler (sans doute en se renouvelant de manière que le niveau reste constant), le corps restera néanmoins dans le même lieu. Mais il ne reste pas dans le voisinage des mêmes particules d'eau.

Passant au cas de la conservation du mouvement uniforme suivant la même direction, Euler demande : « Si l'espace et le lieu n'étaient que le rapport des corps coexistants, qu'est-ce que serait la même direction? » C'est à peu près le raisonnement de Neumann. « Donc il faut qu'il y ait encore quelque autre chose de réel, outre les corps, à laquelle se rapporte l'idée d'une même direction : et il n'y a aucun doute que ce soit l'espace dont nous venons d'établir la réalité. »

Le mémoire d'Euler, d'ailleurs très court, est ce qu'on appellerait aujourd'hui peu documenté. Néanmoins ses raisonnements et sa conclusion me semblent parfaitement logiques. Nous y trouvons même un commencement d'appel à l'expérience directe dans l'exemple du corps placé dans l'eau qui s'écoule.

Cet exemple, toutefois, n'est pas très heureux et doit être regardé plutôt comme un commentaire que comme une démonstration. Au moyen des mouvements de rotation, nous pouvons serrer de beaucoup plus près la démonstration expérimentale.

Newton, déjà, avait montré l'importance des mouvements de rotation dans cette question. A vrai dire, il n'a pas étudié la question même qui nous occupe, parce qu'il semble n'avoir jamais admis qu'on pût élever un doute sur l'existence des mouvements absolus, qu'il appelle « vrais » ; mais il s'est posé la question toute voisine de distinguer pratiquement ces mouvements des mouvements apparents.

Dans le grand scolie du livre des Principes, qui termine les définitions et précède les axiomes, il s'exprime ainsi à ce sujet :

« *Motus quidem veros corporum singulorum cognoscere et ab apparentibus actu discriminare difficillimum est; propterea quod*

partes spatii illius immobilis, in quo corpora VERE *moventur, non incurrunt in sensus. Causa tamen non est prorsus desperata* (*). »

Il fait remarquer que les effets par lesquels on distingue les mouvements absolus des mouvements relatifs sont les forces par lesquelles les corps tendent à s'éloigner de l'axe du mouvement circulaire, et il rapporte cette expérience qu'il dit avoir réalisée : un seau plein d'eau est suspendu par une longue corde et on lui imprime un mouvement rapide de rotation. Le seau tourne d'abord seul et la surface de l'eau est plane ; mais peu à peu le mouvement se communique à l'eau, dont la surface se creuse par l'effet de la force centrifuge; cette force, caractéristique de l'état de mouvement, est d'autant plus grande que le mouvement relatif, par rapport au seau, devient plus faible.

On peut citer, dans le même ordre d'idées, l'expérience de la toupie posée sur un plateau pivotant. Si c'est elle qui tourne, elle reste debout; si l'on fait tourner le plateau avec la même vitesse en sens contraire, elle ne peut se maintenir.

Dans l'un et l'autre de ces exemples, les effets du mouvement ne sont nullement en rapport avec le mouvement relatif aux corps environnants. Donc il y a dans l'eau ou dans la toupie autre chose que ce mouvement relatif.

En d'autres termes, suivant une expression d'Euler, « l'inertie ne se règle point sur les corps voisins ».

Se réglerait-elle sur les corps plus éloignés, sur la Terre notamment?

Cela est peu vraisemblable suivant nos idées modernes. Qu'un ancien eût attribué une importance prépondérante au mouvement par rapport à la surface terrestre, rien de plus naturel. Mais, pour nous, la Terre n'est qu'un support comme un autre, beaucoup plus vaste, sans doute, que le seau ou que le plateau, mais n'en différant par aucune propriété essentielle.

(*) « Il est, à la vérité, très difficile de connaître les mouvements vrais des corps et de les distinguer effectivement des mouvements apparents; parce que les parties de cet espace immobile dans lequel les corps se meuvent véritablement ne tombent pas sous les sens; cependant la cause n'est pas complètement désespérée. »

Il faut convenir néanmoins que les expériences qui précèdent pourraient recevoir cette interprétation. A cause de la lenteur relative de la rotation de la Terre, qui n'effectue, par rapport au système stellaire, que $^{1}/_{86164}$ de tour par seconde, elles ne permettent pas de décider si c'est la rotation par rapport à elle ou par rapport aux étoiles qui détermine la forme concave de la surface liquide et la station de la toupie.

Heureusement nous sommes en mesure aujourd'hui, grâce à Léon Foucault, de faire un pas de plus. Foucault, en effet, nous a donné le moyen d'instituer sur la Terre des mouvements qui rendent sensible la lente rotation dont nous venons de parler.

Dans son pendule, nous voyons le plan d'oscillation se transporter parallèlement à lui-même dans l'espace, sauf les modifications résultant de certaines liaisons avec la Terre. Ou, pour parler plus exactement, si nous faisons la théorie du mouvement pendulaire en appliquant le principe de l'inertie avec un système de comparaison indépendant de la rotation terrestre, et si, d'autre part, nous observons le mouvement du pendule, nous trouvons que l'observation concorde avec la théorie, pourvu qu'on prenne pour le système de comparaison visé dans celle-ci un système qui conserve une direction invariable par rapport au ciel étoilé.

Donc l'inertie de la masse pendulaire ne se règle pas sur la masse terrestre.

Même conclusion avec le gyroscope.

La théorie de cet instrument, réduite à l'essentiel pour notre objet, peut se faire en quelques mots, grâce au célèbre théorème de Poinsot sur le mouvement d'un corps fixé par son centre de gravité.

D'après ce théorème, le mouvement du corps est déterminé par celui de son ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité, qui roule sur un plan tangent perpendiculaire à l'axe du couple résultant des quantités de mouvement.

Le gyroscope est un solide de révolution ayant le moment d'inertie le plus grand possible autour de son axe de figure et disposé de manière à pouvoir tourner autour de cet axe; celui-ci est

soutenu lui-même de manière à pouvoir prendre une direction quelconque autour du centre de gravité, qui est fixe. Si on imprime au solide et si on entretient un mouvement de rotation très rapide autour de l'axe de figure, on voit cet axe rester presque immobile. Mais un examen plus attentif montre qu'il se déplace très lentement par rapport aux supports, et cela de telle manière que l'axe prolongé passe constamment par un même point du ciel (*).

Ainsi, le gyroscope est une espèce de boussole qui se tient constamment sur le point du ciel vers lequel on l'a une fois orientée, comme l'aiguille aimantée se tient sur le nord magnétique, de quelque manière qu'on tourne son support.

Or, que dit la théorie?

L'ellipsoïde d'inertie de la masse gyroscopique est de révolution autour de l'axe de figure et très aplati, à cause de la disposition de cette masse. Le mouvement initial est une rotation rapide autour de ce même axe, suivant lequel, par conséquent, se trouve dirigé l'axe du couple résultant des quantités de mouvement. Le plan tangent perpendiculaire à ce dernier axe est donc tangent au sommet de l'ellipsoïde, et comme aucun autre plan tangent n'est aussi rapproché du centre, le point de contact ne peut se déplacer. Le mouvement se réduit donc à un pivotement sur le sommet, c'est-à-dire autour de l'axe de révolution.

Ainsi, l'axe de rotation doit conserver une direction invariable par rapport au système de comparaison. La théorie est d'accord avec l'observation si l'on prend un système de comparaison ayant une direction invariable par rapport aux étoiles.

La simplicité théorique du gyroscope ne va pas sans de grandes difficultés d'exécution. Si l'on peut, en abandonnant un peu de cette simplicité, rendre l'expérience plus facile, cela n'a aucun inconvénient, pourvu que la théorie reste abordable. Tel est le cas du *barogyroscope* de Gilbert.

(*) Foucault obtenait des effets plus accentués en supprimant partiellement la liberté de l'axe de rotation; la théorie devient alors plus complexe, mais la formule générale ci-après reste applicable.

Avec l'un ou l'autre de ces appareils, le résultat de l'expérience peut toujours se résumer dans la proposition suivante, identique à celle que nous avons formulée pour le cas du pendule :

Le mouvement déterminé par la théorie par rapport à un système de comparaison fixe, est conforme à celui que l'on observe, par rapport à un système de comparaison indépendant de la Terre et conservant une direction invariable par rapport aux étoiles.

IV

Ainsi donc, l'inertie ne se règle ni sur les corps voisins ni sur la masse terrestre. Se réglerait-elle sur les étoiles? Voici ce qu'Euler répond à cette hypothèse :

« S'ils disaient que c'est par rapport aux étoiles fixes qu'il » fallait expliquer le principe de l'inertie, il serait bien difficile » de les réfuter, vu que les étoiles fixes, étant elles-mêmes en » repos, sont si éloignées de nous, que les corps qui se trouvent » en repos par rapport à l'espace absolu, comme on le regarde » dans la mathématique, le seraient aussi par rapport aux » étoiles fixes (*). Mais outre que ce serait une proposition » bien étrange et contraire à quantité d'autres dogmes de la » métaphysique, de dire que les étoiles fixes dirigent les corps » dans leur inertie, cette règle se trouverait également fausse, » s'il nous était permis d'en faire l'application aux corps qui » sont proches de quelque étoile fixe. »

Cette dernière considération acquiert bien plus de force aujourd'hui que nous savons que les étoiles dites fixes ne sont pas fixes du tout, qu'elles sont composées des mêmes éléments

(*) Il est à peine besoin de faire remarquer la faute de rédaction que contient cette phrase. Si les étoiles fixes sont véritablement en repos, leur éloignement n'a rien à faire dans la question. C'est seulement lorsqu'on les suppose en mouvement absolu que l'éloignement intervient pour leur donner l'apparence du repos. C'est peut-être ce qu'Euler a voulu dire : il écrivait dans une langue qui n'était pas la sienne.

chimiques que notre système solaire, et ont une constitution entièrement analogue à celle du Soleil. Leur attribuer un rôle aussi spécial ne peut guère venir à l'esprit d'un moderne.

Tout le monde admettra, je pense, sans difficulté que si le système de comparaison auquel il faut rapporter le gyroscope ou le barogyroscope est invariable par rapport aux étoiles, cela n'est pas l'effet d'une action spéciale de celles-ci, de telle sorte que le gyroscope cesserait d'être orienté si les étoiles cessaient d'exister; cela tient à l'immense éloignement de ces astres et à l'extrême lenteur qui en résulte pour leurs déplacements angulaires.

De même que l'expérience du seau d'eau ou celle de la toupie ne permettent pas de distinguer la rotation par rapport à la Terre de la rotation par rapport aux étoiles, de même le gyroscope ne permet pas de distinguer celle-ci de la rotation par rapport à l'espace absolu.

Cependant il convient de mentionner ici une proposition assez étrange qu'a formulée un physicien allemand, connu par des travaux importants sur l'histoire de la mécanique, Ernest Mach. D'après Mach (*), le système de comparaison par rapport auquel il faut appliquer le principe de l'inertie serait bien formé de l'ensemble des masses de l'univers, mais les masses éloignées y auraient un rôle tout à fait prépondérant. Ainsi ces masses, qui n'ont aucune influence appréciable sur les accélérations des corps du système solaire, auraient au contraire sur les vitesses une action auprès de laquelle celle des corps rapprochés serait négligeable.

Ce système, qui paraît être le dernier refuge du relativisme, montre que Mach a très bien compris la nécessité d'un lien physique entre le système de comparaison et les corps mobiles, d'une action réelle sur ces derniers; mais pour l'adopter, il faudrait, ce me semble, avoir une bien grande répugnance pour la conception de l'espace absolu réel.

Il aurait, entre autres conséquences, celle-ci, que le système de comparaison ne serait plus universel. Il varierait d'un point

(*) *Die Geschichte und die Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit.* Prague, 1872; cité par Streintz, *loc. cit.*, p. 6.

à l'autre du monde. Il est vrai que la variation serait inappréciable dans les limites du système solaire, et qu'au delà la fantaisie peut se donner carrière !

Ces considérations semblent décisives. Cependant nous devons nous demander s'il n'est pas possible de trancher la question expérimentalement. Le gyroscope de Foucault n'est ni assez précis ni d'un fonctionnement assez durable, pour nous révéler le mouvement propre du système stellaire. Mais les observations astronomiques ne peuvent-elles nous venir en aide ?

Nous avons à notre portée un gyroscope séculaire : le globe terrestre. Il est vrai que, semblable en cela au barogyroscope, il est soumis à des forces qui ne passent pas par son centre de gravité : c'est un gyroscope luni-solaire. Mais peu importe ; si nous pouvons déterminer par la théorie son mouvement autour de son centre de gravité, par rapport à des axes fixes, nous pourrons rechercher ensuite si le système de comparaison auquel il faut rapporter les observations pour les faire concorder avec la théorie, est fixe ou mobile par rapport aux étoiles.

Malheureusement, nous nous heurtons ici à une difficulté d'un nouveau genre : c'est la variabilité du système des étoiles. Une étude d'ensemble des mouvements propres serait nécessaire pour aboutir ; je ne crois pas qu'elle ait été faite à ce point de vue.

L'astronomie nous donne prise sur cette question d'une autre manière encore.

En principe, tout mouvement peut servir à constater l'immobilité du système de comparaison. Mais en fait, il faut qu'il puisse être calculé et observé avec une précision suffisante. Le pendule de Foucault et le gyroscope sont des appareils dont la théorie est simple, où les causes perturbatrices sont relativement peu importantes, et dont les mouvements sont faciles à repérer par rapport à la Terre et par rapport au ciel. Or, l'astronomie nous présente un appareil où ces conditions se trouvent réalisées avec une perfection exceptionnelle : c'est le système solaire. Si la théorie n'en est pas très simple, du moins elle est faite, ce qui suffit, et les calculs en ont été poussés au dernier degré de la précision. Les observations réalisent aussi la plus haute précision.

Dans cette théorie, les mouvements sont rapportés à un système fixe, dans lequel l'un des plans coordonnés est généralement l'écliptique d'une époque déterminée. Elle fait connaître, entre autres résultats, les déplacements de l'écliptique vraie par rapport à cette écliptique fixe. Si ces déplacements sont égaux à ceux que cette écliptique vraie éprouve par rapport à l'ensemble des étoiles, c'est que cet ensemble est fixe dans l'espace; dans le cas contraire, il aurait un mouvement de rotation absolu.

Le résultat d'une semblable étude serait assurément fort intéressant en lui-même. Il n'est peut-être pas à espérer qu'il soit assez caractérisé pour être décisif. Le mouvement de rotation de l'ensemble de l'univers, s'il existe, est probablement assez faible pour qu'il ne soit pas facile de le dégager avec certitude au milieu des effets des mouvements individuels des étoiles et des apparences produites par le mouvement de translation du système solaire. Il n'y aurait d'ailleurs rien de surprenant à ce que ce mouvement fût tout à fait nul.

Je pense qu'il n'est pas nécessaire d'attendre ce résultat pour conclure que l'inertie ne se règle pas plus sur l'ensemble des étoiles que sur le corps terrestre.

Mais la considération du système solaire doit nous retenir un instant encore, car elle nous fournit un argument considérable en faveur de l'espace réel.

Les équations différentielles des mouvements planétaires sont établies par rapport à des axes fixes ou, du moins, se transportant parallèlement à eux-mêmes. Si l'on voulait rapporter ces mouvements à un autre système, ayant une rotation par rapport au premier, il faudrait joindre aux attractions newtoniennes les forces apparentes dont Coriolis a donné l'expression : la simplicité des lois de Kepler et de Newton ferait place à une complication extrême.

C'est ce qui serait arrivé pratiquement si le système des étoiles, auquel nous rapportons presque inévitablement les observations, s'était trouvé avoir une rotation sensible.

Ainsi, l'admirable simplicité de l'explication newtonienne du système du monde suppose essentiellement ce fait, que le système

de comparaison auquel nous rapportons les mouvements planétaires est le même aujourd'hui qu'à l'époque la plus reculée à laquelle remontent les observations; le lien physique que nous avons reconnu nécessaire continue son effet à travers les âges; le système de comparaison qui « règle l'inertie » n'est pas seulement universel, il est aussi perpétuel.

En d'autres termes, l'hypothèse d'un espace absolu réel est la base indispensable de la théorie newtonienne. Si le grand homme ne l'a pas fait ressortir lui-même, c'est vraisemblablement parce que, ainsi que nous l'avons déjà vu, il n'admettait aucun doute au sujet de la réalité des mouvements absolus et, par conséquent, de la réalité de l'espace, qui en est la condition.

V

La réalité de l'espace absolu étant admise, le principe de l'inertie acquiert un sens précis; c'est par rapport à un système quelconque de points fixes pris dans cet espace que se règle le mouvement rectiligne uniforme. Il est vrai que ces points, nous ne sommes pas capables de les distinguer les uns des autres : ils sont distincts en eux-mêmes, et cela suffit.

Mais dans la pratique, pour l'appliquer ou le vérifier, nous sommes bien obligés de recourir à des systèmes de comparaison matériels, les seuls par rapport auxquels nous puissions mesurer des distances et étudier le mouvement d'une manière géométrique.

Il y a, en effet, deux manières, et pas davantage, d'observer un mouvement : un procédé direct, géométrique ou cinématique, qui consiste à mesurer à chaque instant la distance du point mobile ou de certains points du corps mobile, à des points ou surfaces de comparaison; un procédé indirect, qu'on pourrait appeler aussi dynamique, qui consiste à observer certains effets du mouvement, tels que la déformation de la surface libre d'un liquide, la station d'une toupie, la tension d'un fil ou d'un ressort et, plus généralement, la déformation ou le déplacement d'un

corps en relation avec le mobile (*), des réactions sur nos organes, etc.

Cette dernière méthode est souvent précieuse : nous avons vu qu'elle permet seule de constater le caractère absolu du mouvement, mais elle est incomplète ; les faits observés ne permettent, en général, de saisir qu'une partie des circonstances du mouvement. L'autre exige un système de comparaison matériel et n'est, par conséquent, applicable qu'à des mouvements relatifs ; mais elle permet d'en déterminer avec précision tous les détails. Elle est donc, le plus souvent, la seule admissible.

Prenons comme système de comparaison un corps dont le mouvement absolu soit une translation rectiligne et uniforme. Un point qui n'est sollicité par aucune force et dont, par conséquent, le mouvement absolu est rectiligne et uniforme, aura aussi un mouvement relatif rectiligne et uniforme. Ainsi, le principe de l'inertie s'applique dans le mouvement relatif à ce système comme dans le mouvement absolu.

La réciproque est vraie : les systèmes de ce genre sont les seuls par rapport auxquels le principe s'applique.

On sait, en effet, que pour étudier théoriquement un mouvement relatif, il faut procéder comme pour un mouvement absolu, mais en joignant aux forces proprement dites qui sollicitent le point mobile, les forces apparentes auxquelles nous avons fait allusion plus haut et qui dépendent du mouvement absolu du système de comparaison. Elles sont au nombre de deux, savoir : la force dite d'entraînement et la force centrifuge composée de Coriolis.

Quand il n'y a pas de forces absolues, il faut, pour que le mouvement relatif soit rectiligne et uniforme, que l'ensemble des deux forces apparentes soit constamment nul : elles ne peuvent pas se détruire constamment et dans tous les cas, puisque la seconde dépend de la vitesse relative, qui est sans influence sur la première ; donc elles doivent être nulles séparément. Or, la force

(*) On peut rattacher à ce cas, par exemple, la découverte de Neptune par les perturbations d'Uranus.

de Coriolis n'est toujours nulle que si le système de comparaison n'a pas de rotation; l'autre ne l'est que s'il n'a pas d'accélération. D'où la proposition annoncée.

Streintz désigne sous le nom de *corps fondamental* un corps ayant le mouvement considéré, et sous le nom de *système fondamental* de coordonnées, un système lié à un tel corps. Il introduit cette notion dans l'énoncé du principe de l'inertie. C'est par rapport à un système fondamental quelconque que le principe doit être appliqué.

Comment reconnaître un pareil système?

La première condition, l'absence de rotation, peut se reconnaître expérimentalement. Si deux gyroscopes orientés différemment ont leurs axes invariablement parallèles à deux droites du système, c'est que ces droites se transportent parallèlement à elles-mêmes dans l'espace.

Il n'en est pas de même de la seconde condition.

Nous n'avons, au moins dans l'état actuel de nos connaissances, aucun moyen de constater ni les vitesses, ni les accélérations absolues. Tout ce que nous pouvons dire, et c'est le commentaire qu'il faut joindre à l'énoncé du principe de l'inertie, c'est que, chaque fois qu'un corps sans rotation et un point matériel présentent une accélération relative, on trouve toujours quelque part un corps dont l'action, sur l'un ou sur l'autre ou sur les deux, explique ce phénomène.

On prendra donc comme système fondamental un système sans rotation qui *paraîtra* n'être soumis à aucune influence extérieure appréciable.

Le résultat obtenu sera d'autant plus exact que cette hypothèse se trouvera plus approchée de la réalité.

C'est ainsi que, pendant longtemps, on a fait et vérifié la théorie du pendule en prenant pour système fondamental un système lié à la surface terrestre; Foucault, le premier, a su mettre en évidence l'erreur qu'introduisait dans la théorie la rotation de ce système : les observations les plus délicates ne permettent pas actuellement d'y démêler l'influence de l'accélération du centre de la Terre.

Eu égard à ces considérations, Streintz formule le principe de l'inertie de la manière suivante :

« *Un point matériel qui n'est soumis à aucune action extérieure, se meut par rapport à un corps qui n'est de même soumis à aucune action extérieure et qui n'a pas de rotation, d'un mouvement rectiligne et uniforme.* »

Au point de vue mathématique, il n'y a rien à dire à cet énoncé. Il est exact, et, en outre, il est incontestable que nous ne pouvons pas vérifier le principe autrement que sous cette forme, c'est-à-dire en rapportant les mouvements à un système fondamental. Si donc on tient absolument à s'écarter le moins possible de l'expérience, il faut adopter cet énoncé.

Il présente même un certain avantage au point de vue didactique, c'est de supprimer toutes les démonstrations ayant pour but d'établir que certains théorèmes, démontrés pour le mouvement absolu, sont également vrais dans le mouvement relatif à un système de comparaison animé d'une translation rectiligne et uniforme. D'après Streintz, ce ne sont pas là de véritables démonstrations, attendu qu'il n'y a aucune différence pratique entre un système fondamental et un système en repos absolu, que nous n'avons aucun moyen de distinguer ces deux cas et que des théories fondées sur l'expérience ne peuvent, par conséquent, faire aucune différence entre eux.

A vrai dire, cet avantage est mince, car la démonstration dont il s'agit peut être présentée une fois pour toutes en quelques lignes. Et même elle n'est pas supprimée réellement dans le système de Streintz, elle est retournée. La considération du mouvement absolu est, en effet, si naturelle à l'esprit humain que, si on veut l'écarter, on ne peut se dispenser de dire pourquoi. C'est ce qu'on ferait par la démonstration en question, de laquelle il résulte qu'on ne peut pas distinguer pratiquement le mouvement absolu du mouvement par rapport à un système fondamental. Seulement, on la présenterait sous la forme d'un raisonnement hypothétique : Si le mouvement absolu existait, tous les théorèmes démontrés pour ce cas seraient vrais relativement à un système fondamental, donc, etc.

Et maintenant, est-il bien nécessaire de serrer d'aussi près l'expérience? N'est-il pas légitime d'en mettre à profit non seulement les résultats immédiats, mais aussi les déductions plus éloignées, pour arriver à édifier un système qui, sans être moins correct au point de vue mathématique, soit plus satisfaisant au point de vue philosophique?

Nous avons essayé de montrer dans ce qui précède que l'existence de l'espace réel est une conséquence de l'expérience. Il est même surprenant que Streintz, qui a discuté d'une manière si judicieuse les faits propres à démontrer l'existence de la rotation absolue, se soit refusé à voir cette conséquence : si les corps tournent d'une manière absolue, ils tournent par rapport à quelque chose, et quelque chose d'étranger à toute matière.

Cette rotation consiste en un déplacement des points du corps par rapport à ceux de ce quelque chose. Le déplacement d'un point, voilà le fait élémentaire et fondamental. Quand ce déplacement varie d'un point à un autre du corps suivant une certaine loi, le mouvement est une rotation; quand il est le même pour tous, c'est une translation. Peut-on voir là une différence radicale, au point que, suivant la distinction admise par Streintz à la suite de Kant, la rotation soit un phénomène réel, tandis que la translation absolue serait même impossible? Évidemment non. Si la rotation est un phénomène réel, c'est que le déplacement d'un point du corps par rapport à un point de l'espace est un phénomène réel, et il ne peut pas cesser de l'être par le seul fait que le point voisin a un déplacement égal.

Cette distinction absolue entre la translation et la rotation est d'autant moins philosophique qu'en réalité, dans la nature, il n'y a ni rotation ni translation. En cinématique, où l'on étudie le mouvement de figures invariables, on rencontre, en effet, ces deux mouvements types. Mais pour les corps naturels, les mots de solidité et de rigidité n'ont qu'un sens essentiellement relatif et approximatif : ces corps ne peuvent pas se mouvoir sans se déformer incessamment, et dès lors, leur mouvement ne peut être ni une rotation rigoureuse ni une translation pure.

Ce qui est vrai, c'est que nous n'avons pas les mêmes moyens de constater la translation que la rotation. Mais cela n'a rien de

commun avec la réalité du phénomène, et cela ne nous interdit pas de le prendre en considération si cette réalité nous est démontrée. Il y a ainsi beaucoup de faits que nous ne pouvons pas constater directement et qui n'en sont pas moins certains. Quelqu'un, je crois, a déjà fait cette comparaison : la face postérieure de la Lune échappe et échappera toujours à nos investigations, et cependant nous sommes parfaitement certains qu'elle existe et même qu'elle a une figure à très peu près sphérique; rien n'est plus légitime que de prendre un pareil fait comme base d'une théorie scientifique.

Je conclus de là qu'il n'y a pas lieu de s'arrêter à la distinction de Streintz, et j'estime préférable d'introduire la notion de l'espace absolu dans l'énoncé, ou plutôt devant l'énoncé du principe de l'inertie. Cet énoncé conserve ainsi la simplicité qui convient à un principe aussi fondamental, tandis que celui de Streintz exige une dissertation préliminaire sur l'existence de la rotation absolue. D'ailleurs, si l'espace absolu existe, comme je crois l'avoir démontré, il est très utile de placer à l'entrée de la science l'affirmation d'un fait aussi essentiel.

VI

Il resterait maintenant à discuter les objections qu'on a opposées à cette conception de l'espace réel. En réalité, j'en connais fort peu : cette idée paraît avoir été plutôt méconnue que combattue.

On devrait les trouver réunies dans l'ouvrage de Streintz, qui a étudié consciencieusement tous les auteurs, savants ou philosophes, qui ont traité des principes de la mécanique, qui expose en détail les idées d'Euler et qui les repousse. Or, voici tout ce que j'y trouve comme pouvant ressembler à une réfutation.

« On ne peut pas se défendre de la pensée qu'Euler se soit
» représenté l'espace comme une espèce de fluide immobile,
» dont les particules peuvent se distinguer, de sorte qu'il soit
» possible de déterminer des distances par rapport à elles....
» Celui qui ne parle jamais d'autre chose que de position par
» rapport à l'espace, de mouvement absolu, rapporté directement

» à l'espace, doit nécessairement se représenter l'espace comme
» quelque chose de saisissable (*greifbares*) à quoi on peut appli-
» quer un mètre, sur les points de quoi on peut viser (*). »

Plus loin, l'auteur reproduit avec admiration le passage suivant de Kant, qu'il voudrait, dit-il, voir écrit en lettres d'airain dans toutes les salles de cours de physique :

« ... Quand même je voudrais imaginer un espace mathéma-
» tique vide de toutes créatures, comme un réceptacle des
» corps, cela ne me servirait de rien. Car comment pourrais-je
» en distinguer les parties et les différentes places, qui ne sont
» occupées par rien de corporel? »

Et c'est tout !

Or il est visible que le grand philosophe allemand et son moderne admirateur ont ici confondu l'ordre de la connaissance avec celui de la réalité. Pour qu'une chose fût réelle, il faudrait que nous eussions le moyen de la connaître et même de l'observer directement !

En appliquant rigoureusement la même argumentation aux mouvements relatifs à des corps matériels, on conclurait que ces mouvements sont réels ou non suivant que ces corps nous offrent ou ne nous offrent pas le moyen de constater avec précision la position du mobile. Ainsi, par rapport à une sphère de métal parfaitement polie, le mouvement ne serait pas réel, car tout ce que nous pouvons faire est de mesurer la plus courte distance à la sphère, sans pouvoir l'orienter; au contraire, le mouvement par rapport à un cube serait réel, parce que nous pouvons mesurer les distances aux sommets ; dans le premier cas, le mouvement deviendrait réel à l'instant où nous aurions marqué des points sur la sphère à l'aide d'un burin !

Nous l'avons dit plus haut, ce qui importe, ce n'est pas que *nous* puissions distinguer entre eux les points de l'espace, que nous puissions les viser, etc., mais c'est que ces points soient distincts en eux-mêmes et que le passage d'une particule matérielle de l'un à l'autre soit un fait réel.

(*) *Op. cit.*, p. 36.

Quant à dire qu'on matérialise l'espace, qu'on en fait une espèce de fluide, etc., ce ne sont que des mots. Mots très mal appliqués du reste. Rien ne ressemble moins à la matière, essentiellement mobile et impénétrable, que l'espace immobile et pénétrable dont nous avons parlé.

En réalité, nous ne matérialisons pas du tout l'espace ; ce qui est vrai et ce qui est bien différent, c'est que nous en faisons une substance.

Je devrais laisser aux philosophes le soin de discuter ce point, mais il ne semble guère contestable : l'espace réel est une substance.

Le P. Leray ajoute : une substance exclusivement passive, par opposition aux autres créatures qui sont, à la fois, actives et passives. Je suis obligé, en cela, de me séparer de lui. Le rôle « souverain » que nous avons reconnu à l'espace ne semble guère compatible avec ce caractère de passivité pure et implique, au contraire, une puissante activité. C'est même par cette activité que nous avons démontré la réalité de l'espace.

Ce qui a pu faire hésiter à accepter cette réalité, c'est qu'en général on se représente l'espace comme indéfini. Or, en dehors de Dieu, toute réalité est nécessairement finie ; c'est pourquoi on a réduit l'essence de l'espace à une simple possibilité d'extension. Mais c'est le contraire qu'il faut faire. L'espace est réel, nous l'avons démontré ; donc il est fini.

Le P. Leray se demande même comment les corps doivent se comporter lorsqu'ils arrivent aux limites de l'espace ; je me dispenserai de le suivre jusque-là. Je ferai remarquer seulement que cette idée de l'espace fini offre une ressource précieuse et à peu près indispensable à ceux qui veulent constituer le monde sans actions à distance, et, par conséquent, sans forces attractives. Car il faut bien admettre, en tous cas, que la matière est finie. Or, les atomes placés à la périphérie de l'univers ne peuvent avoir que des vitesses dirigées vers l'extérieur, en l'absence de toute cause capable de les pousser vers l'intérieur. Ils devraient donc, si l'espace était sans limites, s'éloigner indéfiniment et, de proche en proche, le monde matériel irait en se raréfiant constamment.

VII

La conclusion de cette étude est donc qu'il faut placer en tête de la science mécanique l'hypothèse d'un espace réel, auquel se rapporteraient essentiellement les mouvements de la matière, et par rapport auquel s'appliquerait d'une façon primordiale le principe de l'inertie.

J'emploie à dessein ce mot d'hypothèse, non pas du tout pour atténuer l'affirmation de la réalité de l'espace et comme concession destinée à rendre moins hostiles les esprits qu'elle choque, mais pour bien montrer quelle est, à mon avis, la place de la mécanique dans l'ensemble des sciences, et par quelle voie nous sont acquises les notions fondamentales qui en forment le point de départ.

La mécanique est essentiellement une science expérimentale : c'est une branche de la physique, la plus simple dans son objet, la plus étendue dans ses développements et dans ses applications. Lorsqu'on a voulu la constituer en science rationnelle, on a dû procéder comme pour toutes les autres parties de la physique : on a cherché à former une hypothèse tellement constituée que les faits expérimentaux en fussent la conséquence logique. La mécanique rationnelle est le développement de cette hypothèse. Ce qu'on est convenu d'appeler les principes fondamentaux, en est la partie la plus spéciale, la plus saillante. D'autres parties non moins essentielles n'ont pas été mises en évidence d'une manière aussi explicite, soit parce que les fondateurs de la science n'en ont pas aperçu la nécessité, soit, au contraire, parce qu'ils les ont supposées acquises par ailleurs et incontestées.

Ce dernier cas, nous l'avons vu, est celui de Newton, en ce qui concerne la notion de l'espace et du mouvement absolus.

La plupart des auteurs, en exposant les principes fondamentaux de Newton, et en déclarant, avec raison, qu'on ne peut pas en donner une démonstration proprement dite, mais qu'ils se justifient par la vérification de leurs conséquences dans des cas innombrables, semblent s'excuser de baser la science sur des principes qui ne soient pas mieux établis. C'est méconnaître le

caractère de science physique qui est essentiel à la mécanique. Cela est ainsi parce que cela doit être et ne peut pas être autrement. On le comprendrait mieux si l'on présentait ces principes pour ce qu'ils sont réellement, des hypothèses.

Tout autre est le cas pour une science très voisine de la mécanique dans la forme, à tel point que beaucoup de questions se trouvent traitées dans l'une ou dans l'autre à peu près indifféremment : je veux dire la cinématique. Elle étudie le mouvement des figures, tandis que la mécanique étudie le mouvement des corps matériels ; aussi est-elle une science purement mathématique et repose-t-elle uniquement sur des définitions et des axiomes, tout comme la géométrie.

Ce rapprochement nous fera mieux comprendre l'importance, en mécanique, de la notion de l'espace absolu.

En cinématique aussi, on parle de mouvement absolu et de mouvement relatif : l'esprit humain ne peut se passer d'un point d'arrêt. Mais l'absolu ne se trouve ici que dans notre esprit ; tel système de comparaison considéré, dans une question, comme étant en repos, sera, dans une autre question, considéré comme étant en mouvement par rapport à un second, celui-ci par rapport à un troisième, et ainsi sans limite obligée. Souvent même c'est le système supposé d'abord en mouvement qui sera, dans une seconde étude, supposé en repos, et par rapport auquel on déterminera le mouvement de celui qui était d'abord fixe : on sait qu'on tire grand parti de cette inversion du mouvement.

En mécanique, il en est tout autrement : il y a un système de comparaison naturel, l'espace absolu, et des systèmes matériels assimilables, les systèmes fondamentaux de Streintz. Si, dans la plupart des questions, on emploie d'autres systèmes, notamment des systèmes liés à la surface terrestre, ce n'est pas, comme en cinématique, par une considération de l'esprit qui n'affecte en rien la rigueur des conclusions : c'est par approximation. Sans doute on peut calculer le mouvement par rapport à des axes quelconques en introduisant les forces apparentes : ce n'est, au fond, qu'une transformation de coordonnées opérée dans les équations différentielles ; mais la simplicité de celles-ci en est profondément altérée. Les systèmes fondamentaux sont les seuls

par rapport auxquels elles aient toute la simplicité que comportent les lois naturelles en jeu.

C'est ce qui fait la différence entre la théorie du pendule de Foucault et celle du pendule ordinaire. Celle-ci, beaucoup plus simple, ne s'applique en toute rigueur que par rapport à un système fondamental et d'une manière approchée seulement, par rapport à des axes liés à la surface terrestre. La première donne le mouvement exact par rapport à ces axes, mais elle est beaucoup plus compliquée.

Par la considération de l'espace réel, la notion du mouvement acquiert une importance tout autre que dans le système relativiste. Dans ce dernier, un corps est à volonté en repos ou en mouvement plus ou moins rapide, suivant la manière dont on le considère; dans l'autre, il a un mouvement parfaitement déterminé, indépendamment de toute considération de l'esprit : le mouvement est un état des corps, caractérisé par la vitesse de chaque point, comme le fait d'être chaud est un état caractérisé par la température.

Cela étant, le principe de l'inertie semble à peine une hypothèse nouvelle, mais plutôt un corollaire de celle de l'espace absolu combinée avec le principe de causalité : le mouvement, considéré comme un état, ne peut être modifié que par quelque cause.

Cependant, il contient, en réalité, deux notions nouvelles.

D'abord, celle de la ligne droite. Il est vrai qu'elle entre déjà dans la définition de la vitesse. Si l'on admettait comme définition de la ligne droite une ligne dont la direction est constante, le mouvement en ligne droite résulterait nécessairement de la conservation de la vitesse.

En second lieu, il y a ce fait que l'espace ne produit aucune résistance capable d'altérer la vitesse des corps. Cela rentre bien, si l'on veut, dans la définition de l'espace réel; mais il convient de mettre cette propriété en évidence pour bien distinguer l'espace des corps matériels.

La vitesse comprend deux éléments : la grandeur et la direction. La grandeur a une importance spéciale et l'on sait quelle

place a prise dans la science moderne la considération de l'énergie cinétique, qui est la moitié du produit du carré de la vitesse par la masse; c'est une quantité qui dépend, par conséquent, de la grandeur de la vitesse et non de sa direction.

Dans le système relativiste, le mot d'énergie n'a aucun sens absolu; on ne peut pas dire qu'un corps contient ou possède tant ou tant d'énergie. Il a une certaine énergie dans le mouvement par rapport à un autre corps, et une autre, toute différente, dans le mouvement par rapport à un second corps. Ce théorème, que l'énergie totale de l'univers est constante, n'a aucun sens dans ce système.

Ainsi, qu'on communique à un seul point matériel une certaine vitesse, ou que l'on communique la même vitesse en sens inverse à tout le reste de l'univers, cela est parfaitement indifférent dans le système relativiste, et cependant cela met en jeu des quantités d'énergie singulièrement inégales.

Il ne suffirait même pas, pour donner un sens à ce théorème, d'ajouter le qualificatif d'énergie totale *intérieure*, car la démonstration qu'on en donne suppose des axes qui se transportent parallèlement à eux-mêmes, et ce transport parallèle n'a pas de sens en dehors de la notion d'espace absolu réel.

Cette notion est donc en parfaite harmonie avec les idées modernes sur l'énergie.

Du reste, à mesure qu'on retourne cette question, on s'aperçoit de plus en plus que cette hypothèse de l'espace réel est sous-entendue partout dans la mécanique; mais la plupart des auteurs évitent de la creuser. Newton lui-même, qui l'admet sans discussion, et Euler, qui la pose d'une manière très précise, non sans y faire, à l'occasion, quelques infidélités, ne semblent pas avoir vu que cet espace doit être fini. Ce point est cependant très nécessaire pour bien faire sentir la portée du mot *réel* appliqué à l'espace. Les expériences de Foucault et de ses successeurs lui ont donné une importance nouvelle et un point d'appui plus précis. Par tous ces motifs, il m'a paru utile et opportun de la bien mettre en évidence.

FIN DE LA SECONDE PARTIE.

